「カラビ・ヤウ超曲面の幾何転移」正誤表

三浦 真人 *

概要

ファノ多面体の森理論に関する [三 21, 定理 4.3] の主張は一般には成立しない。この誤りについて、反例と修正された主張を提示する。

1　正誤表

カラビ・ヤウ超曲面の幾何転移について概説した [三 21] において、次の結果を主張したが、これは誤りであった。以下では、誤りを含む部分に下線を引いて主張を再掲する。ただし、元の概説 [三 21, §1–3] では導入しなかった [Miu22] からの用語と記法を用いることで、やや言葉遣いを変更した。これらの用語と記法は、定義 1.1–1.3 で定義する。また、反例は例 1.4 において、修正された主張は定理 1.5 において後述する。

【誤】 [三 21] の定理 4.3. 高々端末的特異点を持つ $\mathbb{Q}$-分解的射影トーリック多様体 X_Σ に対して、K_{X_Σ}-負な端射線 $R \subset \mathrm{NE}(X_\Sigma)$ に関する収縮射 $\varphi_R : X_\Sigma \to X_{\Sigma'}$ は、ファノ多面体 $\nabla := \operatorname{Conv} G(\Sigma)$, $\nabla' := \operatorname{Conv} G(\Sigma')$ の次のような変換に対応する：

- φ_R がフリップ収縮なら、ファノ多面体は一定である：$\nabla = \nabla'$,
- φ_R が因子収縮なら、<u>ファノ多面体はカバー関係である：$\nabla \gtrdot \nabla'$</u>,
- φ_R がファイバー収縮なら、ファノ多面体の森ファイバー構造 $\nabla_{\mathrm{f}} \circledast \nabla$ があって、その底 A_{b} は $\nabla' = \operatorname{Conv}(A_{\mathrm{b}})$ を満たす。

逆に、ファノ多面体のカバー関係 $\nabla \gtrdot \nabla'$ および森ファイバー多面体 $\nabla_{\mathrm{f}} \circledast \nabla$ に対して定まる収縮射 $\varphi : X_\Sigma \to X_{\Sigma'}$ はそれぞれ、ある K_{X_Σ}-負な端射線に関する因子収縮およびファイバー収縮になる。

* 大阪大学大学院理学研究科

定理の前半の主張は、ファノ多面体 $\nabla = \operatorname{Conv} G(\Sigma)$, $\nabla' = \operatorname{Conv} G(\Sigma')$ を、それぞれ後述の原始生成系 $A = G(\Sigma), A' = G(\Sigma')$ に置き換えることで、定理 1.5 の正しい主張に修正できる。より精密には、下線部、すなわち φ_R が因子収縮のときのみが問題で、ファノ多面体が一定に保たれてしまうケースがある (例 1.4 参照)。フリップ収縮とファイバー収縮の場合の主張は間違っていない。「逆に」以降の、後半の主張も有効なままである。とくに、[三 21, 第 3 節] のトーリックパートへの応用において支障は生じない。

それでは、まず上に用いた用語と記法を紹介する。

定義 1.1 ([Miu22, Definition 2.1]). 格子点集合 $A \subset N$ が、($N_{\mathbb{R}}$ の) **原始生成系** (*primitive generating set, primset*) であるとは、$A \subset N^{\mathrm{prim}}$ であり、A が錐体として $N_{\mathbb{R}}$ を生成するときをいう。

定義 1.2 ([Miu22, Definition 2.2]). 原始生成系の包含関係 $A \supset A'$ に対し、$|A| = |A'|+1$ であるとき、原始生成系 A' は A の**縮小**によって得られるという。これを $A \gtrdot A'$ と表す。

定義 1.3 ([Miu22, Definition 2.2]). 原始生成系 A に対し、部分集合 $A_{\mathrm{f}} \subset A'$ が A の**ファイバー構造**であるとは、A_{f} が空集合ではなく、A_{f} の張る線形部分空間 $L \subset N_{\mathbb{R}}$ の原始生成系になっていて、$A_{\mathrm{f}} = L \cap A$ を満たすときをいう。

原始生成系のファイバー構造 $A_{\mathrm{f}} \subset A$ には、アーベル群の完全列

$$0 \longrightarrow N_{\mathrm{f}} \longrightarrow N \xrightarrow{\pi} N_{\mathrm{b}} \longrightarrow 0, \tag{1.1}$$

が付随する。ここで、$N_{\mathrm{f}} \coloneqq L \cap N$, $N_{\mathrm{b}} \coloneqq N/N_{\mathrm{f}}$ である。各 $v \in A \setminus A_{\mathrm{f}}$ に対し、1 次元錐体 $\mathbb{R}_{+}\pi(v) \subset (N_{\mathrm{b}})_{\mathbb{R}}$ の原始生成元を $\overline{\pi}(v) \in N_{\mathrm{b}}$ とおけば、自然な写像

$$\overline{\pi} : A \setminus A_{\mathrm{f}} \to A_{\mathrm{b}} \coloneqq \{\overline{\pi}(v) \mid v \in A \setminus A_{\mathrm{f}}\} \subset N_{\mathrm{b}} \tag{1.2}$$

が定まる。この写像は $\overline{\pi} : A \dashrightarrow A_{\mathrm{b}}$ ともかく。このようにして得られる $(N_{\mathrm{b}})_{\mathbb{R}}$ の原始生成系 A_{b} をファイバー構造 $A_{\mathrm{f}} \subset A$ の**底**と呼ぶ。

ファイバー構造 $A_{\mathrm{f}} \subset A$ が**既約**であるとは、$|A| = |A_{\mathrm{f}}| + |A_{\mathrm{b}}|$ が成立することをいい、**森ファイバー構造**であるとは、$A_{\mathrm{f}} \subset A$ が既約であって、かつ $|A_{\mathrm{f}}| = \dim L + 1$ を満たすときをいう。森ファイバー構造 $A_{\mathrm{f}} \subset A$ を、$A_{\mathrm{f}} \circledast A$ と表す。

定義 1.2, 定義 1.3 で定義した全ての用語はファノ多面体に対しても定義される。これは単に、ファノ多面体 ∇ の代わりに原始生成系 $\nabla \cap N^{\mathrm{prim}}$ を用いて条件を読み替えればよい。森ファイバー構造を備えたファノ多面体を、**森ファイバー多面体**と呼ぶ。[*1]

[*1] これは [三 21, 定理 4.3] における元の定義と同じである。

一般に、扇 Σ に対して、**倉** (*shed*) を次のように定義する。

$$\operatorname{shed}(\Sigma) \coloneqq \bigcup_{\sigma\in\Sigma} \operatorname{Conv}(\{0\}\cup G(\sigma)) \subset \operatorname{Conv} G(\Sigma), \tag{1.3}$$

ここで、$G(\sigma)$ は有理錐体 σ の 1 次元面を生成する原始的格子点の集合である。倉 $\operatorname{shed}(\Sigma)$ は一般に凸でなく、その凸包がファノ多面体 $\operatorname{Conv} G(\Sigma)$ に一致する。次は、[三 21, 10 ページ最下部] に含まれる誤りの修正である ([Miu22, Remark 2.7] も参照)。

【誤】実際、端射因子収縮 $\varphi_R : X_\Sigma \to X_{\Sigma'}$ に対し、つぶれる因子に対応する格子点 $v \in G(\Sigma) \setminus G(\Sigma')$ が $\underline{\text{ファノ多面体} \operatorname{Conv} G(\Sigma')}$ の外部にある（境界に乗る、内部に含まれる）ことと、$K_{X_\Sigma}.R < 0$（$= 0, > 0$）であることがそれぞれ同値になる。

【正】実際、端射因子収縮 $\varphi_R : X_\Sigma \to X_{\Sigma'}$ に対し、つぶれる因子に対応する格子点 $v \in G(\Sigma) \setminus G(\Sigma')$ が $\underline{\text{倉} \operatorname{shed}(\Sigma')}$ の外部にある（境界に乗る、内部に含まれる）ことと、$K_{X_\Sigma}.R < 0$（$= 0, > 0$）であることがそれぞれ同値になる。

とくに、K_{X_Σ}-負な端射線 $R \subset \operatorname{NE}(X_\Sigma)$ に関する因子収縮 $\varphi_R : X_\Sigma \to X_{\Sigma'}$ に対しては、非自明な倉の包含 $\operatorname{shed}(\Sigma) \supsetneq \operatorname{shed}(\Sigma')$ があるものの、ファノ多面体まで粗視化することで $\operatorname{Conv} G(\Sigma) = \operatorname{Conv} G(\Sigma')$ と一致してしまう可能性がある。実際、以下の例 1.4 のように、このような例は存在し、この場合に [三 21, 定理 4.3] が不成立となる。

例 1.4. 自由アーベル群 $\mathbb{Z}^3$ の標準基底を e_1, e_2, e_3 とかき、$\rho \coloneqq e_1 + e_2 + e_3$ とおく。格子 N を、$\mathbb{Z}^3$ に $\rho/2$ を添加して得られる自由アーベル群と定める。原始格子点

$$v_i \coloneqq 3e_i - \rho/2 \in N^{\mathrm{prim}} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{1.4}$$

および $-\rho/2 \in N^{\mathrm{prim}}$ を頂点とする単体 $\nabla = \operatorname{Conv}\{v_1, v_2, v_3, -\rho/2\}$ を考えれば、∇ はファノ多面体である。このとき、原始生成系 $A \coloneqq \left(\nabla \cap N^{\mathrm{prim}}\right) \setminus \{\rho/2\}$ をとれば、$\operatorname{Conv} A = \nabla$ を満たしている。

原始生成系 A の射影極大扇 Σ_A とは、$G(\Sigma_A) = A$ を満たす射影単体的 (完備) 扇のことであった [三 21, 脚注 7]。今の場合、A の射影極大扇 Σ_A として、3 次元の端末的錐体 $\sigma = \operatorname{Cone}(e_1, e_2, e_3)$ を含むものを取ることができるため、そのように取っておく。また、∇ の射影極大扇 $\Sigma = \Sigma_A^*(\rho/2)$ を、Σ_A の $\rho/2$ による星状細分 [CLS11, p.515] によって定める。このとき、上述の通り、倉の包含 $\operatorname{shed}(\Sigma_A) \subsetneq \operatorname{shed}(\Sigma)$ から、対応する射影的なトーリック射 $\varphi : X_\Sigma \to X_{\Sigma_A}$ が K_{X_Σ}-負な端射線に関する因子収縮であることが分かる。一方、構成から $\operatorname{Conv} G(\Sigma) = \operatorname{Conv} G(\Sigma_A) = \nabla$ なので、ファノ多面体は保たれており、[三 21, 定理 4.3] の反例になっている。

以下が、誤りを修正した主張である。

定理 1.5. 高々端末的特異点を持つ $\mathbb{Q}$-分解的射影トーリック多様体 X_Σ に対して、K_{X_Σ}-負な端射線 $R \subset \mathrm{NE}(X_\Sigma)$ に関する収縮射 $\varphi_R : X_\Sigma \to X_{\Sigma'}$ は、原始生成系 $A \coloneqq G(\Sigma)$, $A' \coloneqq G(\Sigma')$ の次のような変換に対応する：

- φ_R がフリップ収縮なら、原始生成系は一定である：$A = A'$,
- φ_R が因子収縮なら、原始生成系はカバー関係である：$A \gtrdot A'$,
- φ_R がファイバー収縮なら、原始生成系の森ファイバー構造 $A_\mathrm{f} \circledast A$ があって、$A' = A_\mathrm{b}$ がその底となる。

逆に、原始生成系のカバー関係 $A \gtrdot A'$ および森ファイバー原始生成系 $A_\mathrm{f} \circledast A$ に対して定まる収縮射 $\varphi : X_\Sigma \to X_{\Sigma'}$ はそれぞれ、ある端射線に関する因子収縮およびファイバー収縮になる。ファイバー収縮の場合はつねに K_{X_Σ}-負であり、さらに、ファノ多面体のカバー関係 $\nabla \gtrdot \nabla'$ に対して定まる因子収縮も K_{X_Σ}-負である。

補足 1.6. 定理 1.5 の後半の主張において、原始生成系のカバー関係 $A \gtrdot A'$ に対して定まる因子収縮 $\varphi : X_\Sigma \to X_{\Sigma'}$ は、K_{X_Σ}-負であるとは限らない。

補足 1.7. [三 21, 問題 5.4] において、d 次元の標準多面体は大域連結か、という個室改築問題[*2]を提起した。定理 1.5 を用いた議論により、$d = 2$ の場合は解決済みであるため、ここに追記しておく。以下では、多角形とは 2 次元の多面体のことであり、端末多角形とは原点と頂点のみを格子点として含む整多角形のことである。

定理 1.8 ([Miu22, Theorem 1.3])**.** 標準多角形、および端末多角形は大域連結である。

参考文献

[CLS11] David A. Cox, John B. Little, and Henry K. Schenck, *Toric varieties*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 124, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. MR 2810322

[Miu22] Makoto Miura, *The web of reflexive polygons is connected*, 2022.

[三 21] 三浦真人, **カラビ・ヤウ超曲面の幾何転移**, 城崎代数幾何学シンポジウム報告集 (2021).

[*2] 以前は独居改築問題と書いたが、呼び名を変更する。