

Grassmann 多様体のトーリック退化とミラー対称性

三浦 真人*

概要

本論文では, Grassmann 多様体の斉次座標環 R を多項式環 $k[x] = k[x_1, \dots, x_n]$ の部分代数と見なすときに, 一様斉次な sagbi 基底が存在するような項順序の条件を調べた. とくに, このような項順序の同値類のなす集合 T_R^1 には置換群の自然な作用が定まることを用い, Grassmann 多様体 $G(2, n)$ とスピノル多様体 $OG(5, 10)$ の 2 つの例に関して, この条件を決定した. またミラー対称性への応用として, これらの旗多様体の完全交叉として得られる 3 次元 Calabi-Yau 多様体の例に対して, ミラー多様体の周期写像を計算し, 量子微分方程式を満たすことを確かめた.

目次

1	導入	2
2	項順序によるトーリック退化	2
2.1	記法と基本的な事実	2
2.2	Grassmann 多様体	5
2.3	スピノル多様体	7
2.4	退化先のトーリック多様体	10
2.5	T_R^1 の計算	11
3	ミラー対称性への応用	12
3.1	周期写像の計算	12
3.2	量子コホモロジーと量子微分方程式	15
4	考察	17
付録	旗多様体の完全交叉型 3 次元 Calabi-Yau 多様体	17

* muon@ms.u-tokyo.ac.jp

1 導入

旗多様体^{*1}は、平坦な変形によってトーリック多様体に退化する。この事実は Grassmann 多様体の場合に [Stu96] によって指摘され、[GL96] により一般の旗多様体へ一般化された。その後、旗多様体のトーリック退化の研究は [Cal02] や [AB04] などによって深められ、表現論的な背景も明らかになってきている。

[Stu96] でトーリック退化が考えられたとき、多項式環 $k[x] = k[x_1, \dots, x_n]$ の定まった項順序 \prec に対して部分代数 $R \subset k[x]$ が sagbi 基底を持つか、という問題が併せて述べられた。sagbi 基底とはイデアルに対する Gröbner 基底の部分代数における類似で、先頭項が、 R の先頭代数 $\text{in}_\prec R$ を生成するような部分代数 $R \subset k[x]$ の有限生成系のことである。^{*2}一般に、代数多様体の座標環 $R \subset k[x]$ が sagbi 基底を持てば、その代数多様体の平坦なトーリック退化を構成できる。

sagbi 基底の有無を判定するというこの問題は重要な未解決問題として知られており、[Kur02] で、ある種の有限群の不変式環に対する sagbi 基底の有無の簡便な判定法が与えられている他は、少数の特殊な例を除いてその判定法は得られていない。こうした観点から、[Stu96] で得られた結果 (定理 6) を次のように述べる事が出来る。すなわち Grassmann 多様体を含む A 型旗多様体の行列の成分によって表示した座標環 $R \subset k[x]$ は、対角項順序 \prec_{diag} という特別な項順序に対して一様斉次な sagbi 基底を持つ。ここで一様斉次な sagbi 基底とは、等しい次数の斉次多項式からなる sagbi 基底のことである。

ミラー対称性への応用を試みる際、一様斉次な sagbi 基底の存在はその旗多様体の完全交叉として得られる Calabi-Yau 多様体に対して、[BCFKvS98] などの提案するミラー多様体の構成法が適用できることを保証するものだと考えられる。

本論文ではまず、Grassmann 多様体 $G(2, n)$ やスピノル多様体 $OG(5, 10)$ の行列の成分によって表示した座標環 $R \subset k[x]$ に対して、一様斉次な sagbi 基底のとれる項順序の条件を決定した。また、ミラー対称性への応用として、これらの旗多様体の完全交叉として得られる 3 次元 Calabi-Yau 多様体に対して [BCFKvS98] などの提案するミラー多様体の構成法を用い、ミラー多様体の構成と、周期写像の計算を実行した。結果は量子コホモロジーの計算から予想されるものと整合するものであった。

謝辞

本論文の作成にあたり、終始熱心なご指導を頂いた指導教官の細野忍准教授に感謝の意を表します。同研究室の金澤篤君と日々重ねた議論は大変有意義なものでありました。本当にありがとうございました。317 院生室のみなさんからも数々の貴重な助言を頂きましたことに、心より感謝いたします。

2 項順序によるトーリック退化

2.1 記法と基本的な事実

$k[x] = k[x_1, \dots, x_n]$ を体 k 上の n 変数多項式環とし、 $k[x]$ の単項式を $x^a = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ のように略記する。 $k[x]$ の項順序 \prec とは単項式全体に入る全順序であって、任意の $a, b, c \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^n$ に対し条件 $1 \prec x^a$ 、および $x^a \prec x^b \Rightarrow x^{a+c} \prec x^{b+c}$ を満たすものである。単項式 x^a にかかる 0 でない係数は区別しない。項順序 \prec の定まった多項式環 $k[x]_\prec$ において、多項式 $f(x) \in k[x]_\prec$ の先頭項 $\text{in}_\prec f(x)$ が一意的に定まり、部分代数 $R \subset k[x]_\prec$ に対して先頭代数

$$\text{in}_\prec R = k[\text{in}_\prec f(x) | f(x) \in R]$$

^{*1} 本論文を通して旗多様体とは単連結複素単純 Lie 群 G とその放物部分群 P によって定まる一般旗多様体 G/P のことを指す。

^{*2} “sagbi” とは “subalgebra analogue of Gröbner basis for ideals” の頭字語である。sagbi 基底の定義で有限性を仮定しない流儀が一般的だが本論文ではこれを仮定する。

が定義できる．本論文を通して部分代数というときには多項式環 $k[x]$ の k -部分代数を指すことにする．

部分代数 $R \subset k[x]$ に対して，多項式の有限集合 $S \subset R$ が項順序 \prec に関する R の sagbi 基底であるとは， S の元先頭項が $R \subset k[x]_{\prec}$ の先頭代数を生成するときをいう．すなわち，

$$\text{in}_{\prec} R = k[\text{in}_{\prec} s(x) \mid s(x) \in S].$$

このとき， $R \subset k[x]_{\prec}$ は sagbi 基底を持つという．イデアルに対する Gröbner 基底とは異なり，一般に部分代数 R は sagbi 基底を持つとは限らない．もし R が sagbi 基底 $S \subset R$ を持つなら，Gröbner 基底に関するわり算アルゴリズムと同様の方法で R の任意の多項式を S を使って表すことが出来る．つまり $R \subset k[x]$ は実際に S を生成系とする； $R = k[S]$ ．(本論文とは異なり，[Stu96] のように sagbi 基底の有限性を仮定から落として定義の方が普通である．その場合，ここでの sagbi 基底に全て「有限の」と接頭語をつけて読み直せばよい．)

$k[x]$ の項順序全体の集合を考える．とくに，この集合に部分代数 $R \subset k[x]$ による同値関係

$$\prec \sim_R \prec' \iff \text{in}_{\prec} R = \text{in}_{\prec'} R$$

を入れて，次のように項順序集合 $T_R \subset T_R^{\infty}$ を定めると見通しが良い．

定義 1. 部分代数 $R \subset k[x]$ に対して，

$$T_R^{\infty} = \{ \prec \mid \prec \text{ は } k[x] \text{ の項順序} \} / \sim_R$$

$$T_R = \{ \prec \mid \text{項順序 } \prec \text{ に関して } R \subset k[x]_{\prec} \text{ は sagbi 基底を持つ} \} / \sim_R.$$

定義がうまくいっていることは容易に確認できる．すぐに分かる通り， T_R^{∞} は $R \subset k[x]$ の先頭代数全体の集合 $\{\text{in}_{\prec} R\}$ と， T_R は $R \subset k[x]$ の有限生成な先頭代数全体の集合 $\{\text{in}_{\prec} R \mid \text{有限生成部分代数}\}$ と同一視出来る．また部分代数 $R \subset k[x]$ が次数付き部分代数であるとき，新たに項順序集合 $T_R^1 \subset T_R$ を定義出来る．

定義 2. 次数付き部分代数 $R \subset k[x]$ に対して，

$$T_R^1 = \{ \prec \mid \text{項順序 } \prec \text{ に関して } R \subset k[x]_{\prec} \text{ は一様斉次な sagbi 基底を持つ} \} / \sim_R$$

ここで多項式の集合が一様斉次であるとは，その要素が全て斉次多項式であり，全ての要素にわたってその斉次次数が等しいときをいう． T_R^1 もまた $R \subset k[x]$ の一様斉次な有限生成系を持つ先頭代数の集合 $\{\text{in}_{\prec} R \mid \text{一様斉次な有限生成系を持つ}\}$ と同一視出来る．以下，混同の恐れがないときは， $\prec \in T_R$ などと書いて同値類もその代表元も表すことにする．

ここからは，多項式の集合 $P = \{p_{\sigma}(x)\} \subset k[x]$ で生成される部分代数 $R = k[P] \subset k[x]$ を考えよう．まず生成系 P が背反条件を満たすとは， P に含まれるどの 2 つの多項式 $p_{\sigma}(x), p_{\tau}(x)$ も同じ単項式を含まないときをいう．次節以降で扱う具体例では，いずれも座標環 R は $k[x]$ の次数付き部分代数であり，背反条件を満たす一様斉次な生成系 P が存在する．このとき，次の補題が成り立つ．

補題 3. 次数付き部分代数 $R \subset k[x]$ が背反条件を満たす一様斉次な生成系 P を持つとき，任意の項順序 \prec に対して，

$$R \subset k[x]_{\prec} \text{ が } P \text{ を sagbi 基底とする} \iff \prec \in T_R^1.$$

証明. (\Rightarrow) は T_R^1 の定義から明らか．

(\Leftarrow) は P の元と同じ斉次次数を持つ多項式が P の元の線形結合で表せることと，背反条件を満たす P の元の線形結合は互いにどの項も打ち消しあわず，新たな先頭項を持たないことから従う． \square

補題 3 により, 次数付き部分代数 $R \subset k[x]$ の項順序集合 T_R^1 を調べるには R とその背反条件を満たす一様斉次な生成系 P を調べれば十分であることが分かる. このような生成系 P がいつでも存在するわけではないが, 一意性は補題 13 で示される.

P が有限集合だとする. $P = \{p_1(x), \dots, p_r(x)\} \subset k[x]$. このとき一般に多項式環 $k[p] = k[p_1, \dots, p_r]$, $k[x]$ の間の k -代数準同型写像

$$\begin{aligned} \phi_P : k[p] &\longrightarrow k[x] \\ p_\sigma &\longmapsto p_\sigma(x) \end{aligned}$$

が定義され, この像が R である. 準同型写像 ϕ_P の核を I_P と表すことにする. また $k[x]$ の項順序 \prec を 1 つ固定するとき, 上記の k -代数準同型写像 $\phi_P : k[p] \longrightarrow k[x]_\prec$ に付随するもう 1 つの k -代数準同型写像

$$\begin{aligned} \psi_{P, \prec} : k[p] &\longrightarrow k[x] \\ p_\sigma &\longmapsto \text{in}_\prec p_\sigma(x) \end{aligned}$$

が定義できる. この準同型写像 $\psi_{P, \prec}$ は単項式写像であり, その核を $J_{P, \prec}$ と表すことにすると, $J_{P, \prec}$ は定義によりトーリックイデアルである. とくに P が一様斉次な生成系するとき, $I_P, J_{P, \prec}$ は斉次イデアルになる.

$k[x]$ に項順序 \prec が定まっているとき,

$$p^a \prec^P p^b \Leftrightarrow \text{in}_\prec p^a(x) \prec \text{in}_\prec p^b(x) \quad (a, b \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^r)$$

と定義することで, $k[p]$ の単項式全体に入る半順序 \prec^P を, 項順序 \prec の ϕ_P による引き戻しと呼ぶことにする. 項順序の引き戻しに対しても多項式の先頭部分, 先頭イデアルなどが定義出来る. また \prec^P の比較可能でない単項式間の順序を $k[p]$ の固定した項順序により定めることで, \prec^P を拡張した $k[p]$ の項順序 \prec^P を構成できる.

以上の準備のもと, 次の定理を述べることが出来る. この定理は本質的に [Stu96] によって示された.

定理 4 ([Stu96]). 任意の有限生成部分代数 $R \subset k[x]$ とその有限生成系 P の組に関して, 項順序 \prec に対する以下の条件は全て同値である.

1. $R \subset k[x]_\prec$ は P を *sagbi* 基底とする.
2. $\text{in}_{\prec^P} I_P = J_{P, \prec}$.
3. \prec の引き戻し \prec^P を拡張した任意の項順序 \prec^P に対して, $\text{in}_{\prec^P} I_P = \text{in}_{\prec^P} J_{P, \prec}$.
4. \prec の引き戻し \prec^P を拡張したある項順序 \prec^P に対して, $\text{in}_{\prec^P} I_P = \text{in}_{\prec^P} J_{P, \prec}$.
5. $\dim(k[p]/I_P)_{\leq d} = \dim(k[p]/J_{P, \prec})_{\leq d}$. (d 次以下の線形部分空間の次元)

さらに R が次数付き部分代数, P が一様斉次な生成系の場合は次が成り立つ.

定理 5 ([Stu96]). 任意の項順序 \prec に対して, $\dim(k[p]/I_P)_d \geq \dim(k[p]/J_{P, \prec})_d$. 定理 4 の同値な条件は次とも同値である.

- 5'. $\dim(k[p]/I_P)_d = \dim(k[p]/J_{P, \prec})_d$ (次数 d の線型部分空間の次元)

定理 4 の条件を満たす項順序 \prec に対して, $R \simeq k[p]/I_P$ を座標環とするアファイン代数多様体 (resp. 射影代数多様体) は平坦な変形でアファイントーリック多様体 (resp. 射影トーリック多様体) $\text{in}_\prec R \simeq k[p]/\text{in}_{\prec^P} I_P = k[p]/J_{P, \prec}$ に退化することが条件 5 (resp. 5') より分かる.

2.2 Grassmann 多様体

まず Grassmann 多様体 $G(m, n)$ のトーリック退化に関する Sturmfels の結果を振り返る．Grassmann 多様体 $G(m, n)$ とは $SL(n)$ の基本表現に対応する旗多様体で， k^n 内の m 次元部分空間からなる代数多様体である．体 k 上の多項式環 $k[p] = k[p_\sigma]$ ， $k[x] = k[x_{ij}]$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) に対し，Plücker 埋め込み $\phi : k[p] \rightarrow k[x]$ が行列 (x_{ij}) の $m \times m$ 小行列式によって定まる．ここで $p_\sigma = p_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m}$ は m 階の反対称テンソルで， $1 \leq \sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_m \leq n$ とする．Grassmann 多様体 $G(2, 4)$ を例にとると，

$$k[p] = k \begin{bmatrix} p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ & p_{23} & p_{24} \\ & & p_{34} \end{bmatrix}, \quad k[x] = k \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \\ x_{13} & x_{23} \\ x_{14} & x_{24} \end{bmatrix}$$

が上記の多項式環であり， $p_{ij} = -p_{ji}$ は 2 階の反対称テンソルである．Plücker 埋め込み $\phi : k[p] \rightarrow k[x]$ は行列 (x_{ij}) の 2×2 小行列式によって定まる準同型写像

$$\begin{aligned} \phi : k[p] &\longrightarrow k[x] \\ p_{ij} &\mapsto p_{ij}(x) = x_{1i}x_{2j} - x_{1j}x_{2i} \end{aligned}$$

のことを指す．このとき，準同型写像 ϕ の像 $R = \text{Im} \phi \subset k[x]$ は Grassmann 多様体 $G(2, 4)$ の斉次座標環であり，核 $I = \text{Ker} \phi = \langle p_{14}p_{23} - p_{13}p_{24} + p_{12}p_{34} \rangle$ は Plücker イdeal と呼ばれる．

さて，[Stu96] にならい，Grassmann 多様体 $G(m, n)$ の斉次座標環 R の生成系 $P = \{p_\sigma(x)\}$ に対し，全ての先頭項 $\text{in}_{\prec} p_\sigma(x)$ が小行列式の対角項 $x_{1\sigma_1}x_{2\sigma_2} \dots x_{s\sigma_s}$ であるような $k[x]$ の項順序 \prec を総じて対角項順序 \prec_{diag} と呼ぶことにする． $G(2, 4)$ の例では $1 \leq i < j \leq 4$ に対して $\text{in}_{\prec_{\text{diag}}} p_{ij}(x) = x_{1i}x_{2j}$ である．このとき，[Stu96] で示された定理は次である．

定理 6 ([Stu96]). *Grassmann 多様体 $G(m, n)$ の場合，対角項順序 \prec_{diag} を任意に 1 つ定めた多項式環 $k[x]_{\prec_{\text{diag}}}$ において， $R \subset k[x]_{\prec_{\text{diag}}}$ は $P = \{p_\sigma(x)\}$ を一様斉次な *sagbi* 基底とする； $\prec_{\text{diag}} \in T_R^1$.*

全ての対角項順序 \prec_{diag} が同じ先頭代数を定めることは自明でないが，定理 6 はこれを保証している．また定理 6 の意味は，より一般的な状況で成立する定理 4 を踏まえればはっきりする．すなわち，対角項順序は Grassmann 多様体 $G(m, n)$ の平坦なトーリック退化を定めているのである．

対角項順序以外の項順序も調べるために $R \subset k[x]$ を不変に保つ不定元 $\{x_{ij}\}$ の置換を考える．一般に不定元の置換は $k[x]$ に自己同型写像として作用し， R を不変に保つ置換全体のなす群 G は項順序全体の集合への作用を定める．すなわち $g \in G, f(x) \in k[x]$ と任意の項順序 \prec に対し

$$\text{in}_{g \cdot \prec} f(x) = g^{-1} \cdot (\text{in}_{\prec} (g \cdot f(x))) = g^{-1} \cdot (\text{in}_{\prec} f(g \cdot x)).$$

これから項順序集合 T_R^∞, T_R, T_R^1 への G の作用がうまく定義できることは容易に確認できる．

Grassmann 多様体 $G(m, n)$ の場合， $R \subset k[x]$ を不変に保つ $k[x]$ の不定元の置換全体のなす群 G は， $\{x_{ij}\}$ の 1 つ目の添え字に作用する m 次対称群 $\mathfrak{S}_m \subset G$ と 2 つ目の添え字に作用する n 次対称群 $\mathfrak{S}_n \subset G$ を部分群とし，直積群 $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$ と自然に同型になる．作用を具体的に書くと， $\alpha \in \mathfrak{S}_m$ に対して x_{ij} は $\alpha \cdot x_{ij} = x_{\alpha ij}$ と置換され，これに応じて $p_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m}(x)$ は

$$\alpha \cdot p_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m}(x_{ij}) = p_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m}(x_{\alpha ij}) = \text{sgn}(\alpha) p_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m}(x_{ij})$$

と変換する．また $g \in \mathfrak{S}_n$ に対して x_{ij} は $g \cdot x_{ij} = x_{igj}$ と置換され，これに応じて $p_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m}(x)$ は

$$g \cdot p_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m}(x_{ij}) = p_{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m}(x_{igj}) = p_{g\sigma_1 g\sigma_2 \dots g\sigma_m}(x_{ij})$$

と変換する．2種類の作用は互いに可換である．一般にこの置換群 G の項順序集合 T_R^∞ への作用は効果的ではない．実際，自然数 $l \in \mathbf{N}$ に対して $\rho_l = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & l \\ l & l-1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = (1, l)(2, l-1) \cdots ([l/2], [l/2]+1) \in \mathfrak{S}_l$ とおくととき，次の補題が成立する．

補題 7. *Grassmann* 多様体 $G(m, n)$ の場合，群 $G \simeq \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$ の T_R^∞ への作用で対角項順序 \prec_{diag} における固定部分群は $\langle (\rho_m, \rho_n) \rangle \simeq \mathbf{Z}_2$ である．

証明. 定理 6 より対角項順序 \prec_{diag} に対して P は R の sagbi 基底になるので， $\text{in}_{\prec_{\text{diag}}} R = k[\text{in}_{\prec_{\text{diag}}} p_\sigma(x)]$ である．また P は背反条件を満たすので，項順序 \prec と対角項順序 \prec_{diag} が等しい先頭代数を持つならば，各 $p_\sigma(x)$ の先頭項が等しい．したがって各 $p_\sigma(x) \in P$ の先頭項を不変に保つ部分群を求めればよい．

$\alpha \in \mathfrak{S}_m$ に対して対角項順序 \prec_{diag} は

$$\begin{aligned} \text{in}_{\alpha \cdot \prec_{\text{diag}}} p_{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m}(x) &= \alpha^{-1} \cdot \text{sgn}(\alpha) x_{1\sigma} x_{2\sigma_2} \cdots x_{m\sigma_m} \\ &= \text{sgn}(\alpha) x_{\alpha_1^{-1} \sigma_1} x_{\alpha_2^{-1} \sigma_2} \cdots x_{\alpha_m^{-1} \sigma_m} \\ &= \text{sgn}(\alpha) x_{1\sigma_{\alpha_1}} x_{2\sigma_{\alpha_2}} \cdots x_{m\sigma_{\alpha_m}} \end{aligned}$$

と変換し， $g \in \mathfrak{S}_n$ に対しては

$$\begin{aligned} \text{in}_{g \cdot \prec_{\text{diag}}} p_{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_m}(x) &= g^{-1} \cdot (\text{in}_{\prec_{\text{diag}}} p_{g\sigma_1 g\sigma_2 \cdots g\sigma_m}(x)) \\ &= g^{-1} \cdot \text{sgn}(\beta) x_{1g\sigma_{\beta_1}} x_{2g\sigma_{\beta_2}} \cdots x_{mg\sigma_{\beta_m}} \\ &= \text{sgn}(\beta) x_{1\sigma_{\beta_1}} x_{2\sigma_{\beta_2}} \cdots x_{m\sigma_{\beta_m}} \end{aligned}$$

と変換する．ただし $1 \leq \sigma_1 < \cdots < \sigma_m \leq n$ であり， $\beta = \beta(\sigma, g) \in \mathfrak{S}_m$ は $g_{\sigma_{\beta_1}} < g_{\sigma_{\beta_2}} < \cdots < g_{\sigma_{\beta_m}}$ を満たすように決めた \mathfrak{S}_m の元である．

$(\alpha, g) \in \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$ に対して， $\text{in}_{\alpha g \cdot \prec_{\text{diag}}} R = \text{in}_{\prec_{\text{diag}}} R$ を仮定する．すなわち，全ての σ に対して $\text{in}_{g \cdot \prec_{\text{diag}}} p_\sigma(x) = \text{in}_{\alpha^{-1} \cdot \prec_{\text{diag}}} p_\sigma(x) = \text{sgn}(\alpha) x_{1\sigma_{\alpha_1^{-1}}} x_{2\sigma_{\alpha_2^{-1}}} \cdots x_{m\sigma_{\alpha_m^{-1}}}$ が成り立つ．これは σ に依らず $\beta = \alpha^{-1}$ であることを意味する．ここで $g_{\sigma_{\alpha_1^{-1}}} < g_{\sigma_{\alpha_2^{-1}}} < \cdots < g_{\sigma_{\alpha_m^{-1}}}$ であるので，任意の $1 \leq j, k \leq m$ に対して $g_{\sigma_j} < g_{\sigma_k} \Leftrightarrow \alpha_j < \alpha_k$ が言える．この条件を満たす $(\alpha, g) \in \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$ を求めればよい．

α を固定するとき，条件 $g_{\sigma_j} < g_{\sigma_k} \Leftrightarrow \alpha_j < \alpha_k$ は $g = \text{id}$ か $g = \rho_n$ であることを意味する．実際， $m = 2$ の場合は自明であり， $m \geq 3$ の場合に $g_{j\pm 1} < g_j > g_{j\mp 1}$ なる $1 \leq j \leq n$ が存在したとすると， $(\sigma_{\min(j,m)-1}, \sigma_{\min(j,m)}) = (j-1, j)$ ， $(j, j+1)$ なる2つの σ を考えれば条件に矛盾する． $g = \text{id}$ なら $\alpha = \text{id}$ であり， $g = \rho_n$ なら $\alpha = \rho_m$ なので主張が示された． \square

補題 7 により，項順序集合 $T_R^1 \subset T_R^\infty$ における対角項順序 \prec_{diag} の G 軌道は $\frac{m!n!}{2}$ 個の項順序を含むことが分かる． T_R^∞ における他の G 軌道の存在についても興味があるが， $G(2, n)$ については次が言える．

補題 8. *Grassmann* 多様体 $G(2, n)$ の場合，任意の項順序 \prec に対して対称群 $\mathfrak{S}_n \subset G$ の元 g が一意的に定まり， $\text{in}_{g \cdot \prec} R = \text{in}_{\prec_{\text{diag}}} R$ が成立する．

証明. 一意性は補題 7 および， $G/\mathbf{Z}_2 \simeq \mathfrak{S}_n \subset G$ より従うので，条件を満たす \mathfrak{S}_n の元の存在を示す．定理 6 より全ての対角項順序 \prec_{diag} は同じ先頭代数を定めるので，任意の項順序 \prec が \mathfrak{S}_n の作用で対角項順序 \prec_{diag} に移せることを言えばよい．そこで，各 $p_{ij}(x)$ ($i < j$) の先頭項を順々に対角にする作業を行う．

まず反辞書式順序

$$p_{ij} < p_{kl} \Leftrightarrow i < k \text{ または } [i = k \text{ かつ } j < l]$$

に関して小さい $p_{ij}(x)$ から始める． $i < j$ に対し， $\text{in}_{\prec} p_{ij}(x) = x_{1j} x_{2i}$ のときは，先頭項が対角でないので

で与えられる．ただし，ここで (x_σ) は添え字 σ に登場する数字の行，列を反対称行列 (x_{ij}) から抜き出して出来る小行列で，具体的にその Pfaffian を計算すると $p_{ijkl}(x) = x_{ij}x_{kl} - x_{ik}x_{jl} + x_{il}x_{jk}$, $p_{ij}(x) = x_{ij}$, $p_\emptyset = 1$ となる．さらに $k[x]$ に斉次パラメータ u を加え， $p_\sigma(x)$ が全て 2 次式の同次射とすれば， $R = \text{Im}\phi$ が $OG(5, 10)$ の斉次座標環になり，

$$p_{ijkl}(x) = x_{ij}x_{kl} - x_{ik}x_{jl} + x_{il}x_{jk}, \quad p_{ij}(x) = ux_{ij}, \quad p_\emptyset = u^2$$

である．

Grassmann 多様体の対角項順序 $\prec_{\text{diag}} \in T_R^1$ にあたるような $k[x]$ の特別な項順序が $OG(5, 10)$ にもあるだろうか？ [SV09] に指摘されているように，スピノル多様体 $OG(n, 2n)$ の場合にも，Grassmann 多様体でいう対角項順序 \prec_{diag} の引き戻しに相当する組合せ論的に自然な単項式の半順序^{*3} が $k[p]$ 側には存在する．しかし，引き戻してこれに一致するような $k[x]$ の項順序は一様斉次な sagbi 基底を持たないことが示せる．^{*4}つまり，対角項順序と同じ意味で特別な項順序は存在しない．そこで今度も R を保つ不定元の置換を考えることで，手がかりを探すことにする．

$k[x]$ に対し， R を不変に保つ不定元の置換のなす群は x_{ij} の添え字に作用する 5 次対称群 \mathfrak{S}_5 である．その作用は，

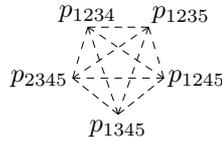
$$\mathfrak{S}_5 \ni g : k[x] \ni x_{ij} \mapsto x_{g_i g_j} \in k[x]$$

と書ける．この作用を再び項順序の変換とみなすことが出来る．

$$\text{in}_{g \cdot \prec} p_\sigma(x_{ij}) = g^{-1} \cdot \text{in}_\prec p_\sigma(x_{g_i g_j}) = g^{-1} \cdot \text{in}_\prec p_{g \cdot \sigma}(x_{ij})$$

作用を視覚化するために次のようなグラフを導入しよう．

定義 10. 各 p_{ijkl} と対応する 5 つの頂点を下図のように並べる．



$k[x]$ の項順序 \prec に対して， p_σ と p_τ に対応する 2 頂点が辺で結ばれる条件を $\text{gcd}(\text{in}_\prec p_\sigma(x), \text{in}_\prec p_\tau(x)) \neq 1$ と定め，得られる単結合グラフを項順序 \prec の先頭項グラフと呼ぶことにする．

条件 $\text{gcd}(\text{in}_\prec p_\sigma(x), \text{in}_\prec p_\tau(x)) \neq 1$ の意味は，2 つの先頭項 $\text{in}_\prec p_\sigma(x), \text{in}_\prec p_\tau(x)$ が，ある共通因子 x_{ij} を持ち，したがって 2 次の関係式 $\text{in}_\prec p_\sigma(x)p_{\tau \setminus \{ij\}}(x) = \text{in}_\prec p_\tau(x)p_{\sigma \setminus \{ij\}}(x)$ が成立するということである．すなわち先頭項グラフの各辺は，イデアル $J_\prec = J_{P, \prec}$ における上の形の 2 次の関係式と対応している．ただし $P = \{p_\sigma(x)\}$ は $k[p]$ の不定元 $\{p_\sigma\}$ の像， $J_{P, \prec}$ は 2.1 節で定義した $\phi = \phi_P : k[p] \rightarrow k[x]_\prec$ に付随する単項式 k -準同型写像 $\psi_{P, \prec} : k[p] \rightarrow k[x]_\prec$ の核として定まるトーリックイデアルである．

例えば項順序 \prec を

$$\begin{aligned} \text{in}_\prec p_{1234}(x) &= x_{12}x_{34} \\ \text{in}_\prec p_{1235}(x) &= x_{12}x_{35} \\ \text{in}_\prec p_{1245}(x) &= x_{12}x_{45} \\ \text{in}_\prec p_{1345}(x) &= x_{13}x_{45} \\ \text{in}_\prec p_{2345}(x) &= x_{23}x_{45} \end{aligned}$$

^{*3} 不定元の束構造が Plücker イデアルの 2 次の生成系の先頭部分のデータを定めるような半順序．定理 6 の証明にはこの束構造を用いた議論が不可欠である．

^{*4} 定理 12 により T_R^1 は求まるので，それぞれの項順序の引き戻しを具体的に計算することで確認出来る．

となるように選んだ場合、先頭項グラフは  である。

先頭項グラフに対して、 \mathfrak{S}_5 は頂点の置換として作用するが、辺の数と頂点の順序を忘れた価数の組を変えない。(上の例では辺の数 6 本、価数の組 $(4, 2, 2, 2, 2)$.)

補題 11. $OG(5, 10)$ に対し、 $k[x]$ の項順序から定まる先頭項グラフは、価数の組が $(4, 2, 2, 2, 2)$, $(3, 3, 2, 1, 1)$, $(2, 2, 2, 2, 2)$ のいずれかである。

証明. 4 価の頂点があるとする。この頂点が p_{1234} であり、 $\text{in}_{\prec} p_{1234}(x) = x_{12}x_{34}$ であるとしても一般性を損なわない。 $\text{in}_{\prec} p_{1234}(x)$ は $\text{in}_{\prec} p_{1235}(x)$, $\text{in}_{\prec} p_{1245}(x)$ と共通因子を持つが、それはいずれも x_{34} であり得ないので x_{12} である。したがって $\text{in}_{\prec} p_{1235}(x) = x_{12}x_{35}$, $\text{in}_{\prec} p_{1245}(x) = x_{12}x_{45}$ が言える。同様に $\text{in}_{\prec} p_{1345}(x)$, $\text{in}_{\prec} p_{2345}(x)$ とは共通因子 x_{34} を持つので $\text{in}_{\prec} p_{1345}(x) = x_{15}x_{34}$, $\text{in}_{\prec} p_{2345}(x) = x_{25}x_{34}$ である。

以上より先頭項グラフは、 であり、価数の組は $(4, 2, 2, 2, 2)$ である。

次に 3 価の頂点があるとする。この頂点が p_{1234} であり、 $\text{in}_{\prec} p_{1234}(x) = x_{12}x_{34}$ であるとしても一般性を損なわない。先と同様に辺で結ばれた頂点との共通因子 x_{ij} は x_{12} か x_{34} で決まってしまうので、残された 1 つの頂点とその先頭項が分かれば先頭項グラフを書くことが出来る。この頂点を p_{2345} としても一般性を損なわない。 $\text{in}_{\prec} p_{1234}(x)$ と共通因子を持たないことから $\text{in}_{\prec} p_{2345}(x)$ は $x_{23}x_{45}$ か $x_{24}x_{35}$ のいずれか

だが、それぞれ  ,  となり、いずれにせよ価数の組は $(3, 3, 2, 1, 1)$ である。

定理 5 より、 J_{\prec} の 2 次の生成元は I の 2 次の生成元より多いため、先頭項グラフが項順序から得られるなら、必ず 5 本以上の辺がなくてはならない。全ての頂点において価数が 2 以下なら、5 本以上の辺を持つ先頭項グラフの価数の組は $(2, 2, 2, 2, 2)$ しかない。よって補題が示された。□

これら 3 通りの価数の組は先頭項グラフの 3 つの \mathfrak{S}_5 軌道と対応していることが直接の計算で分かる。また 2.5 節のアルゴリズム 16 を用いて具体的に T_R^1 を計算することで次の定理が示される。

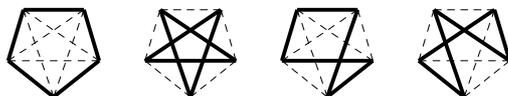
定理 12. T_R^1 に含まれる項順序は先頭項グラフで表され、 \mathfrak{S}_5 軌道は 2 つの価数の組 $(3, 3, 2, 2, 1)$, $(2, 2, 2, 2, 2)$ と対応する。その位数はそれぞれ 60 と 12 である。また T_R^1 に含まれない項順序の先頭項グラフは、価数の組 $(4, 2, 2, 2, 2)$ を持つ。

証明. T_R^1 では、同じ先頭項グラフを定める項順序は全て同値になる。したがって、 T_R^1 の \mathfrak{S}_5 軌道それぞれの位数を下記のように先頭項グラフを数え上げることで計算できる。ただし右に付けたグラフは 2 面体群 $D_5 \subset \mathfrak{S}_5$ で移りあう類の代表元を 1 つずつとったものである。

$(3, 3, 2, 1, 1) \cdots 60$ 個



$(2, 2, 2, 2, 2) \cdots 12$ 個



□

Grassmann 多様体 $G(2, n)$ の場合ととくに異なる点は, T_R^1 が T_R^∞ の真部分集合になること, T_R^1 の G 軌道の数が増える (2つ) になること, の 2 点である.

2.4 退化先のトーリック多様体

トーリック多様体に関しては [Stu96] の第 13 章, もしくは [Oda88], [Ful93], [Ewa96] などの記法に従う. 多項式環 $k[p] = k[p_1, \dots, p_r]$, $k[x] = k[x_1, \dots, x_n]$ とその間の単項式 k -代数準同型写像

$$\begin{aligned} \psi : k[p] &\longrightarrow k[x] \\ p_\sigma &\longmapsto x^{a_\sigma} \end{aligned}$$

があるとき, その核 $J = \text{Ker}\psi$ をトーリックイデアルという. さらに $\{x^{a_\sigma}\}$ が一様斉次のとき, 斉次イデアル J の定める射影空間 \mathbf{P}^{r-1} の部分代数多様体を $\mathcal{A} = \{a_\sigma\}$ の定める射影トーリック多様体, あるいは単にトーリック多様体といい, $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}$ と表す. この定義ではトーリック多様体の正規性は仮定していない.

$k[x]$ に含まれる単項式の指数ベクトル全体は, \mathbf{Z} 加群 $M = \mathbf{Z}^n$ の部分モノイド $\mathbf{Z}_{\geq 0}^n$ をなす. トーリック多様体 $\mathbf{P}_{\mathcal{A}}$ 上の可逆層の同値類, 線束の同型類, Cartier 因子の同値類の間には標準的な対応があり, $M_{\mathbf{Q}} = M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ 内の仮想多面体のユニモジュラ変換による同値類で表すことが出来る. とくに \mathcal{A} の凸閉包として得られる多面体 $\Delta = \text{Conv}\mathcal{A} \subset M_{\mathbf{Q}}$ は $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^{r-1}}(1)|_{\mathbf{P}_{\mathcal{A}}}$ に対応する多面体である.

射影代数多様体 X の座標環 $R \subset k[x]_{\prec}$ に対して, 一様斉次な sagbi 基底 $P = \{p_\sigma(x)\} \subset R$ が存在するとき, k -代数準同型写像 $\phi_P : k[p] \rightarrow k[x]$ に付随する単項式写像

$$\begin{aligned} \psi_{P, \prec} : k[p] &\rightarrow k[x] \\ p_\sigma &\mapsto \text{in}_{\prec} p_\sigma(x) = x^{a_\sigma} \end{aligned}$$

の核 $J_{P, \prec} = \text{Ker}\psi_{P, \prec}$ は平坦な変形で X が退化した先のトーリック多様体を定める.

一般に次数付き部分代数 $R \subset k[x]$ の一様斉次な生成系 $P = \{p_\sigma(x)\}$ が背反条件を満たすとは, どの 2 つの $p_\sigma(x)$, $p_\tau(x)$ も定数倍を除いて等しい項を含まない, というときをいうのであった. とくに Grassmann 多様体, スピノル多様体の場合に扱った小行列の行列式や Pfaffian によって定義される生成系は背反条件を満たしている.

補題 13. 多項式環 $k[x]$ の次数付き部分代数 $R \subset k[x]$ に対し, 背反条件を満たす一様斉次な生成系は存在すれば定数倍を除いて一意である.

証明. 多項式 $f(x)$ の 0 でない項の数を m_f とかく. $f(x) \neq 0 \Rightarrow m_f > 0$ である. $\{p_\sigma(x)\}, \{q_\alpha(x)\}$ をともに背反条件を満たす一様斉次な生成系とすると,

$$\begin{aligned} p_\sigma &= \sum_{\alpha} C_{\sigma\alpha} q_\alpha \\ q_\alpha &= \sum_{\tau} D_{\alpha\tau} p_\tau \end{aligned}$$

と表せる. $\sum_{\alpha} C_{\sigma\alpha} D_{\alpha\tau} = \delta_{\sigma\tau}$ なので, ある $\beta = \beta(\sigma)$ が存在し, $C_{\sigma\beta} \neq 0, D_{\beta\sigma} \neq 0$.

$$m_{p_\sigma} = \sum_{C_{\sigma\alpha} \neq 0} m_{q_\alpha} = m_{p_\sigma} + \sum_{\tau \neq \sigma, D_{\beta\tau} \neq 0} m_{p_\tau} + \sum_{\alpha \neq \beta, C_{\sigma\alpha} \neq 0} m_{q_\alpha}$$

において後ろの 2 項はともに 0 でなくてはならないので, $p_\sigma = C_{\sigma\beta} q_\beta$ であり, $q_\beta = D_{\beta\sigma} p_\sigma = p_\sigma / C_{\sigma\beta}$ である. したがって, 背反条件を満たす一様斉次な生成系は存在すれば定数倍を除いて一意である. \square

補題 13 により, 一様斉次な生成系 P が背反条件を満たしているとき, $R \subset k[x]$ を不変に保つ $k[x]$ の不定元の置換は P にも定数倍を除いて置換として作用することが分かる. このことは $R \subset k[x]$ を不変に保つ $k[x]$ の置換全体がなす群 G の作用を考える 1 つの動機になる. 実際, 退化先のトーリック多様体に関して次の事実が成り立つ.

定理 14. 多項式環 $k[x]$ の次数付き部分代数 $R \subset k[x]$ と, 背反条件を満たす一様斉次な生成系 $P = \{p_\sigma(x)\}$ に対し, T_R^1 内の同じ G 軌道に含まれる項順序は同型なトーリック多様体への退化を定める.

証明. 定数倍を除いて先頭項が $\text{in}_{\prec} p_\sigma(x) = x^{a_\sigma}$ と表せるとき, 項順序 \prec が T_R^1 に含まれるならば, 退化先のトーリック多様体の $\mathcal{O}(1)$ に相当する多面体は $\Delta = \text{Conv}\{a_\sigma\}$ である. 補題 13 より G は $P = \{p_\sigma(x)\}$ へ置換として作用するので, $g \in G$ の項順序集合への作用によって, 定数倍を除いて先頭項は

$$\text{in}_{g \cdot \prec} p_\sigma(x) = g^{-1} \cdot \text{in}_{\prec} p_{g \cdot \sigma}(x) = g^{-1} \cdot x^{a_{g \cdot \sigma}} = x^{g \cdot a_{g \cdot \sigma}}$$

となる. ここで $g \cdot a$ は n 次元ベクトル $a \in \mathbf{Z}^n$ の成分の置換を表す. このとき退化先のトーリック多様体の $\mathcal{O}(1)$ に相当する多面体は $\Delta' = \text{Conv}\{g \cdot a_\sigma\}$ となり, Δ と n 次元の置換行列で移り合う. とくにこれはユニモジュラ変換である. したがって, 退化先のトーリック多様体は同型である. \square

2.5 T_R^1 の計算

イデアルに対する Gröbner 基底の場合とは異なり, 部分代数の sagbi 基底はその存在が保証されておらず, とくに項順序集合 T_R^∞ は有限集合になるとは限らない. 実際に集合 T_R^∞ の濃度は部分代数 $R \subset k[x]$ の性質によって有限になることも非可算無限になることもある ([Kur02]). しかし, 次数付き部分代数 R に対する項順序集合 T_R^1 は有限集合になる. この集合 T_R^1 を計算するには, 重みベクトルによる項順序の実現を考えるという方法が有用である. 以下ではこの方法を用いて一般に T_R^1 を計算するアルゴリズムを与える.

n 変数多項式環 $k[x]$ と正值の重みベクトル $\omega \in \mathbf{R}_{\geq 0}^n$ に対し, 任意の $a, b \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^n$ について $x^a \prec_\omega x^b \Leftrightarrow \omega \cdot a < \omega \cdot b$ によって定めた単項式の間の半順序 \prec_ω を $k[x]$ の重み順序という. 単項式 x^a にかかる 0 でない係数の違いは区別しない. 重み順序 \prec_ω についても多項式 $f(x) \in k[x]$ の先頭部分 $\text{in}_\omega f(x)$ と先頭代数 $\text{in}_\omega R$ が定まる. イデアルの場合と同様に, 部分代数 $R \subset k[x]$ に対して $\text{in}_\omega R = \text{in}_{\prec} R$ のとき重みベクトル ω は項順序 \prec を実現するという. イデアルの場合, 全ての項順序が重みベクトルで実現できる. この主張には Farkas の補題を使った証明 [Stu96] が知られているが, 部分代数に関しても全く同様の議論で次を示すことが出来る.

命題 15. 部分代数 $R \subset k[x]_{\prec}$ が sagbi 基底を持つとする. このとき R に関して項順序 \prec を実現する重みベクトル ω が存在する; $\text{in}_\omega R = \text{in}_{\prec} R$.

アルゴリズム 16. (T_R^1 の計算)

入力: $k[x]$ の次数付き部分代数 $R \subset k[x]$ と背反条件を満たす一様斉次な生成系 $P = \{p_\sigma(x)\}$.

出力: $\Omega = \{\text{in}_{\prec} R \mid \prec \in T_R^1\}$.

1. $\Omega = \emptyset$.
2. P の先頭項の組 $\{\text{in}_{\prec} p_\sigma(x) = x^{a_\sigma} \mid p_\sigma(x) \in P\}$ として可能な全ての組み合わせのリスト L を計算する.
3. L の各要素に対して,
 - 3.1. $R \subset k[x]_{\prec}$ が P を sagbi 基底とするとき, $\Omega := \Omega \cup \{\text{in}_{\prec} R\}$.
4. Ω を返す.

アルゴリズム 16 の 2. で計算するリスト L は、生成系 P の各多項式 $p_\sigma(x)$ が多くの項を含む場合、膨大になる．計算量を軽減するには、 $k[x]$ の不定元の置換で R を保つ群がリスト L に作用することを考慮すればよい．3.1. で P の先頭項の組から定まる項順序 \prec の sagbi 性を判定するのに、以下のサブルーチンを用いる．

サブルーチン 17. (sagbi 性の判定)

入力： n 変数多項式環 $k[x]$ の有限生成部分代数 $R \subset k[x]$ と有限な生成系 $P = \{p_\sigma(x)\}$ ，

および先頭項の組 $\{\text{in}_{\prec} p_\sigma(x) = x^{a_\sigma} \mid p_\sigma(x) \in P\}$ を定める行列 $A = (a_\sigma)$ ．

出力： $R \subset k[x]_{\prec}$ が P を sagbi 基底とする \Rightarrow “YES”，sagbi 基底としない \Rightarrow “NO”．

1. $\text{Cone} := \{\omega \in \mathbf{R}^n \mid \omega \cdot a_\sigma \geq \omega \cdot b_\sigma, x^{b_\sigma} \text{ は } p_\sigma(x) \text{ の項}, p_\sigma(x) \in P\} \subset \mathbf{R}^n$.
2. Cone の次元 $\neq n$ のとき，“NO” を返す．
3. Cone の次元 $= n$ のとき，
 - 3.1. Cone を生成するベクトルの組 $\{\omega_i \in \mathbf{R}^n\}$ を計算する．
 - 3.2. $\omega := \sum_i \omega_i \in \text{Cone}$.
 - 3.3. 重み順序 $\prec_{A\omega}$ を辞書式に拡張した $k[p]$ の項順序 \prec_p に対して $\text{in}_{\prec_p} I_P, \text{in}_{\prec_p} J_{P,\prec}$ を計算する．
 - 3.4. $\text{in}_{\prec_p} I_P = \text{in}_{\prec_p} J_{P,\prec}$ のとき，“YES” を返す．
 - 3.5. $\text{in}_{\prec_p} I_P \neq \text{in}_{\prec_p} J_{P,\prec}$ のとき，“NO” を返す．

サブルーチン 17 の 2. は命題 15 を根拠にしている．3.4. と 3.5. では sagbi 性の判定に定理 4 における同値な条件の 1 つを用いた．また、3.2. で定義されるような 1 つの $\omega \in \text{Cone}$ についてだけ sagbi 性を調べれば十分であることは、 Cone の内部のどの重みベクトルに対しても、定理 4 の条件 5. が変わらないことから従う．実際に計算する際に 3.1. と 3.3. には計算プログラム PORTA と Singular を用いた．

3 ミラー対称性への応用

旗多様体のトーリック退化を、旗多様体の完全交叉として得られる Calabi-Yau 多様体 (以下、フラッグ CICY) のミラー多様体の構成へ応用することができる．そのアイデアは [BCFKvS98], [BCFKvS00] で提案され、[Bat04] で定式化された．本章では体 $k = \mathbf{C}$ とし、[Bat04] での記法を用いる．

一般に Gorenstein トーリック Fano 多様体 \mathbf{P}_Σ を定義する扇を Σ とし、1 次元錐の生成ベクトルを $\Sigma(1) = \{\nu_1^*, \dots, \nu_k^*\}$ とすると、 ν_1^*, \dots, ν_k^* の凸閉包は反射的多面体 Δ^* となる．nef 分割を $\Sigma(1) = I_1 \cup \dots \cup I_r$ によって定めれば、各 I_j に対し半豊富な Cartier 因子 D_j が対応し、 $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_\Sigma}(D_j)$ の一般の大域切断の零点として r 個の超曲面 $Z_j \subset Y$ が定まる．これらの完全交叉を $Z \subset \mathbf{P}_\Sigma$ とするとき、そのミラー多様体 Z^* は次の r 本の定義式で定まる $(\mathbf{C}^*)^n = \text{Spec} \mathbf{C}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}]$ のアフィン完全交叉と双有理同値になる．

$$P_j = 1 - \sum_{\nu_i^* \in I_j} a_i t^{\nu_i^*} = 0.$$

\mathbf{P}_Σ が旗多様体 G/P の平坦なトーリック退化の退化先であるとき、 G/P の完全交叉 Calabi-Yau 多様体のミラー多様体は上記 Z^* を特殊族に制限したものと双有理同値になると予想されている．

3.1 周期写像の計算

[BCFKvS98], [BCFKvS00] によって Graassmann 多様体を含む A 型旗多様体の、対角項順序に対するトーリック退化と 3 次元フラッグ CICY の周期写像を計算する組み合わせ論的な手法が得られている．定理 14 より、 T_R^1 の項順序によるトーリック退化は各 G 軌道の中で同型になるので、1 つの代表元につい

て調べれば十分である．したがってとくに，Grassmann 多様体 $G(2, n)$ の項順序によるトーリック退化は上記の手法に依るもので尽きている．

以下ではスピノル多様体 $OG(5, 10)$ のトーリック退化とフラッグ CICY の周期写像を計算しよう．ま

ず $(3, 3, 2, 1, 1)$ 型の先頭項グラフに対応する退化を調べる．代表元として  をとる．対応する項

順序を \prec とし，前節で議論した \mathbb{C} -準同型写像 $\phi: \mathbb{C}[p] \rightarrow \mathbb{C}[x]$ に付随する単項式 \mathbb{C} -準同型写像

$$\begin{aligned} \psi_{\prec}: \mathbb{C}[p] &\rightarrow \mathbb{C}[x] \\ p_{\sigma} &\mapsto \text{in}_{\prec} p_{\sigma}(x) = x^{a_{\sigma}} \end{aligned}$$

はトーリック多様体 $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ への平坦な退化を定める．ここで $\mathcal{A} = \{a_{\sigma}\}$ の各元は $\mathbb{Q}^{11} = \{(x_0, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{45})\}$ 内の整数ベクトルであり，退化先のトーリック多様体の $\mathcal{O}(1)$ に対応する多面体 $\text{Conv} \mathcal{A}$ は，次数一定の平面

$$x_0 + x_{12} + x_{13} + \dots + x_{45} = 2$$

に乗っている．ここで \mathcal{A} は格子 \mathbb{Z}^{11} の基底になるため，退化先のトーリック多様体 $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ は正規である．多面体の次元 ($= \dim OG(5, 10) = 10$) と格子の階数を一致させるために x_0 を消去しても，格子の構造は保たれる．

次節で見るとように $OG(5, 10)$ の反標準因子 $-K_{OG(5,10)}$ は $\mathcal{O}(8)$ に対応するので，多面体 $\text{Conv} \mathcal{A} \subset \mathbb{Q}^{10}$ を 8 倍して，内点 $(1, 1, \dots, 1)$ を原点に平行移動した $\Delta = (8\text{Conv} \mathcal{A} - (1, 1, \dots, 1))$ を考える．これは期待に叶い反射的多面体である．したがって双対多面体 Δ^* も反射的多面体で，その頂点は次の 15 個である．*5

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} .$$

この頂点を上から $\nu_1^*, \dots, \nu_{15}^*$ と番号付けするとき，これは $\mathbb{P}_{\mathcal{A}}$ のトーラス不変な既約因子 D_1, \dots, D_{15} を定める．Chow 環の線形な関係式は上の行列を縦に読んで，

$$\begin{aligned} D_1 &= D_4 = D_8 = D_{10} = D_{11} + D_{12} + D_{13} + D_{14} + D_{15} \\ D_2 &= D_{13} + D_{14} + D_{15}, \quad D_3 = D_{15}, \quad D_5 = D_{11} + D_{12} + D_{13} + D_{14}, \\ D_6 &= D_{12} + D_{14} + D_{15}, \quad D_7 = D_{11} + D_{12}, \quad D_9 = D_{11} + D_{13} \end{aligned}$$

*5 多面体の双対を計算するのにプログラム PORTA を用いた．

と書き下せる．したがって反標準因子は $-K_{OG(5,10)} = D_1 + D_2 + \cdots + D_{15} = 8D_1$ である．ここで例えば全て次数 1 の超平面による完全交叉を考えれば，その nef 分割は

$$\begin{aligned} I_1 &= \{\nu_1^*\}, & I_2 &= \{\nu_4^*\}, & I_3 &= \{\nu_8^*\}, \\ I_4 &= \{\nu_{10}^*\}, & I_5 &= \{\nu_2^*, \nu_7^*\}, \\ I_6 &= \{\nu_3^*, \nu_5^*\}, & I_7 &= \{\nu_6^*, \nu_9^*\}, \\ I_8 &= \{\nu_{11}^*, \nu_{12}^*, \nu_{13}^*, \nu_{14}^*, \nu_{15}^*\} \end{aligned}$$

と置くことで得られる．対応する Laurent 多項式は，

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 - a_1 t_1, & P_2 &= 1 - a_4 t_4, & P_3 &= 1 - a_8 t_8, \\ P_4 &= 1 - a_{10} t_{10}, & P_5 &= 1 - a_2 t_2 - a_7 t_7, \\ P_6 &= 1 - a_3 t_3 - a_5 t_5, & P_7 &= 1 - a_6 t_6 - a_9 t_9, \\ P_8 &= 1 - \frac{a_{11}}{t_1 t_4 t_5 t_7 t_8 t_9 t_{10}} - \frac{a_{12}}{t_1 t_4 t_5 t_6 t_7 t_8 t_{10}} \\ &\quad - \frac{a_{13}}{t_1 t_2 t_4 t_5 t_8 t_9 t_{10}} - \frac{a_{14}}{t_1 t_2 t_4 t_5 t_6 t_8 t_{10}} - \frac{a_{15}}{t_1 t_2 t_3 t_4 t_6 t_8 t_{10}} \end{aligned}$$

であり，これは全て次数 1 の超平面によるトーリック多様体の完全交叉として得られる Calabi-Yau 多様体（以下，トーリック CICY）に対するミラー多様体の族を与えている．[Bat04] に従い，Picard 数が 1 であることと合わせて助変数を $a = a_1 = a_2 = \cdots = a_{15}$ と制限すれば，この族は K3 曲面 $OG(5, 10)_{1s}$ のミラー多様体の族と双有理同値になると期待される．実際にこの制限の下で周期積分を実行すると， $z = a^8$ と置いて

$$\Phi(z) = \frac{1}{(2\pi i)^{10}} \int_{|t_i|=1} \frac{1}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7 P_8} \prod_{j=1}^{10} \frac{dt_j}{t_j} = \sum_{k,n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 z^n$$

となる．この周期写像は次節で計算される $OG(5, 10)_{1s}$ の量子微分方程式

$$[\theta^3 - z(2\theta + 1)(17\theta^2 + 17\theta + 5) + z^2(\theta + 1)^3] \Phi(z) = 0$$

を満たしている．ただし $\theta = z\partial_z$ とおいた．

3次元 Calabi-Yau 多様体の場合も同様に計算することが可能だ．すなわち，nef 分割は 1 つだけ次数 2 になるように変更して，たとえば，

$$\begin{aligned} I_1 &= \{\nu_1^*, \nu_4^*\}, & I_2 &= \{\nu_8^*\}, \\ I_3 &= \{\nu_{10}^*\}, & I_4 &= \{\nu_2^*, \nu_7^*\}, \\ I_5 &= \{\nu_3^*, \nu_5^*\}, & I_6 &= \{\nu_6^*, \nu_9^*\}, \\ I_7 &= \{\nu_{11}^*, \nu_{12}^*, \nu_{13}^*, \nu_{14}^*, \nu_{15}^*\} \end{aligned}$$

と置けばよい．対応する Laurent 多項式は，

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 - a_1 t_1 - a_4 t_4, & P_2 &= 1 - a_8 t_8, \\ P_3 &= 1 - a_{10} t_{10}, & P_4 &= 1 - a_2 t_2 - a_7 t_7, \\ P_5 &= 1 - a_3 t_3 - a_5 t_5, & P_6 &= 1 - a_6 t_6 - a_9 t_9, \\ P_7 &= 1 - \frac{a_{11}}{t_1 t_4 t_5 t_7 t_8 t_9 t_{10}} - \frac{a_{12}}{t_1 t_4 t_5 t_6 t_7 t_8 t_{10}} \\ &\quad - \frac{a_{13}}{t_1 t_2 t_4 t_5 t_8 t_9 t_{10}} - \frac{a_{14}}{t_1 t_2 t_4 t_5 t_6 t_8 t_{10}} - \frac{a_{15}}{t_1 t_2 t_3 t_4 t_6 t_8 t_{10}} \end{aligned}$$

となり, $a = a_1 = a_2 = \dots = a_{15}$ という助変数の制限のもとで周期積分を実行すると, $z = a^8$ と置いて

$$\Phi(z) = \frac{1}{(2\pi i)^{10}} \int_{|t_i|=1} \frac{1}{P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6 P_7} \prod_{j=1}^{10} \frac{dt_j}{t_j} = \sum_{k,n} \binom{2n}{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 z^n$$

となる. これもまた期待通り, 次節で計算される $OG(5, 10)_{16,2}$ の量子微分方程式

$$[\theta^4 - 2z(2\theta + 1)^2(17\theta^2 + 17\theta + 5) + 4z^2(\theta + 1)^2(2\theta + 1)(2\theta + 3)] \Phi(z) = 0$$

を満たしている.

次に $(2, 2, 2, 2, 2)$ 型の先頭頂グラフに対応する退化を調べる. 代表元として  をとる. 先と

同様に, \mathbf{R}^{10} 内に反標準因子 $-K_{OG(5,10)}$ に対応する $\Delta = (8\text{Conv}A - (1, 1, \dots, 1))$ は反射的多面体になり, 双対多面体 Δ^* の頂点は次の 16 個である. 頂点の数が異なるので先の退化と同型になることはあり得ない.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & -1 & -1 & -2 & -2 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$(3, 3, 2, 1, 1)$ 型の場合と同様にこの場合も nef 分割, 周期写像の計算を実行出来る. 結果は $OG(5, 10)_{18}$, $OG(5, 10)_{16,2}$ と $(3, 3, 2, 1, 1)$ 型の場合と同じく, それぞれの量子微分方程式を満たすことが確認できる.

3.2 量子コホモロジーと量子微分方程式

Grassmann 多様体の量子コホモロジー環の構造は [Ber97] で明らかにされた. 他の旗多様体の量子コホモロジー環についても近年その構造が知られるようになり, Schubert 類の間の量子積構造を完全に決定する Pieri 型, Giambelli 型の関係式まで判明している型も多い. 例えば古典型については [KT03], [KT04] で, いくつかの例外型については [CP09] で計算された. さらに, 旗多様体の量子微分方程式を知るのに必要な Chevalley 型の関係式は, [FW04] により一般の旗多様体の場合について計算されている.

定理 18 ([FW04] 量子 Chevalley 公式).

$$\sigma_{s_\beta} \star \sigma_u = \sum_v M(q)_{uv} \sigma_v = \sum_\alpha h_\alpha(\omega_\beta) \sigma_u + \sum_\alpha q^{d(\alpha)} h_\alpha(\omega_\beta) \sigma_v.$$

ここで, s_β は G/P の \times 印付き節点に対応する単純ルート β の定める Weyl 群 W/W_P の単純鏡映, σ_u は Weyl 群 W/W_P の元 u に対応する G/P の Schubert 類である. その他の記号と和の範囲については省略するが, [FW04] に準拠している.

もちろん $q = 0$ と置けば通常のコホモロジー環の Chevalley 公式になる．それは付録で 3 次元フラッグ CICY の位相不変量を計算する際にも用いられる．

量子微分方程式については [Gue08] に従う．とくに，量子 Chevalley 公式から定まる 1 階の行列微分方程式系

$$q_\beta \partial_{q_\beta} \Psi_u(q) = \sum_v M(q)_{uv} \Psi_v(q)$$

に等価な高階の微分方程式系が存在して，それが量子微分方程式になる．Picard 数 1 の場合は，量子微分方程式は 1 つの変数 $z = q_\beta$ ($s_\beta \in W/W_P$) に関する常微分方程式になる．スピノル多様体 $OG(5, 10)$ の場合に，定理 18 を用いて計算した量子微分方程式は， $\theta = z\partial_z$ として

$$[\theta^{11}(\theta - 1)^5 - z\theta^5(2\theta + 1)(17\theta^2 + 17\theta + 5) + z^2] \Psi(z) = 0$$

である．[Kim97] による量子コホモロジーの超曲面公式を用いれば，次数 d_1, \dots, d_r の超曲面による完全交叉として得られる代数多様体の量子微分方程式の正則解は， $\Psi(z) = \sum_n \psi_n z^n$ を使って，

$$\Phi(z) = \sum_n \prod_{j=1}^r (d_j n)! \psi_n z^n$$

と表せるので， $OG(5, 10)_{1^8}$ の量子微分方程式は

$$[\theta^3 - z(2\theta + 1)(17\theta^2 + 17\theta + 5) + z^2(\theta + 1)^3] \Phi(z) = 0$$

$OG(5, 10)_{1^6, 2}$ の量子微分方程式は

$$[\theta^4 - 2z(2\theta + 1)^2(17\theta^2 + 17\theta + 5) + 4z^2(\theta + 1)^2(2\theta + 1)(2\theta + 3)] \Phi(z) = 0$$

と計算できる．前節でみたようにこれはそれぞれのミラー多様体の周期写像が満たす Picard-Fuchs 方程式でもある．

その他の Picard 数 1 の 3 次元フラッグ CICY に対しても，定理 18 を用いて計算した量子微分方程式を以下に示す．*6

$LG(3, 6)$	$\theta^7(\theta - 1) - 4z\theta(2\theta + 1)(3\theta^2 + 3\theta + 1) + 16z^2$
G_2/P_{long}	$\theta^6 - 3z(2\theta + 1)(3\theta^2 + 3\theta + 1) - 27z^2$
$LG(3, 6)_{1^2, 2}$	$\theta^4 - 8z(2\theta + 1)^2(3\theta^2 + 3\theta + 1) + 64z^2(\theta + 1)^2(2\theta + 1)(2\theta + 3)$
$G_2/P_{\text{long } 1, 2}$	$\theta^4 - 6z(2\theta + 1)^2(3\theta^2 + 3\theta + 1) - 108z^2(\theta + 1)^2(2\theta + 1)(2\theta + 3)$

表 1 量子微分方程式 ($\theta = z\partial_z$)

これらは [vEvS06] による予想と一致している．A 型の Grassmann 多様体やスピノル多様体 $OG(5, 10)$ の場合と同様に，これらの例についてもミラー多様体の周期写像が量子微分方程式を満たすかどうかは，現時点で未解決である．

*6 $OG(2, 7)$ については計算出来ていない．

4 考察

本論文の前半では, Grassmann 多様体 $G(2, n)$, およびスピノル多様体 $OG(5, 10)$ に対して項順序集合 T_R^1 を決定した. 一般の Grassmann 多様体に対しても, $T_R^1 = T_R^\infty$ や $T_R^1 = G \cdot \prec_{\text{diag}}$ などの強い等式が成立するかどうか, 非常に興味深い未解決である.

一般のスピノル多様体 $OG(n, 2n)$ への拡張を考えると, やはり $p_{ijkl}(x)$ という 4×4 の Pfaffian で表される部分に着目すれば項順序に対して先頭項グラフをかくことが出来る. 5 つの添字の選び方で $\frac{n!}{5!(n-5)!}$ 通りの先頭項グラフがかけて, 全てが個数に対する条件を満たさなければならない. しかし, 困難はこうして得られる候補が本当に T_R^1 に含まれるかどうかを簡単に確認する手立てがないことにある. 本論文で提案したアルゴリズムによる計算では, 計算量が n に関して指数的に増大してしまい, $n = 6$ でも T_R^1 が空でないということを確認するだけで終わってしまった. また, G 軌道も非常に複雑になる.

項順序によるトーリック退化は全てのトーリック退化を尽くすわけではない. とくに, [Cal02] や [AB04] による表現論によるトーリック退化との関係は明確でない. しかし一般に表現論によるトーリック退化で旗多様体が平坦にトーリック退化しても, その中のフラッグ CICY がトーリック CICY に退化しない例がある. このような場合には, 本論文でも用いた [BCFKvS98] などによるミラー多様体の構成法が実行できない. 例えば, G_2/P_{long} という旗多様体の表現論によるトーリック退化は 2 通りだけであり, 反標準因子に対応する多面体を具体的に計算すると, いずれも整多面体でなくなる. すなわちこれは線束ではないため上記の手続きが実行できない例になっている. 本論文で扱った $OG(5, 10)$ の例においても, [Lit98] で標準的に選ばれた表現論によるトーリック退化を計算すると, $\mathcal{O}(1)$ に対応する多面体が整多面体でなくなり, 超平面を含んだ完全交叉として得られる Calabi-Yau 多様体はトーリック CICY に退化しないことが分かる. 同様の問題は, 項順序によるトーリック退化では T_R^1 を考えるという形で解決されたが, 表現論によるトーリック退化の側でどのように解決されるべきかまだ分かっていない.

付録 旗多様体の完全交叉型 3 次元 Calabi-Yau 多様体

本付録では, 旗多様体の完全交叉として得られる 3 次元 Calabi-Yau 多様体 (3 次元フラッグ CICY) を分類し, [BCFKvS00] にある A 型旗多様体の場合に続くリストを完成させた. とくに, Picard 数が 1 の 3 次元フラッグ CICY で非自明なものは, $OG(2, 7)_{1^4}$, $LG(3, 6)_{1^2, 2}$, $OG(5, 10)_{1^6, 2}$, $G_2/P_{\text{long}}_{1, 2}$ の 4 つである. 下付きの数字は完全交叉の次数を表している.

単連結複素単純 Lie 群を G の放物部分群を $P \subset G$ とするとき, 旗多様体 G/P は \times 印付き Dynkin 図形によって表される. すなわち各節点が単純ルートを表し, \times 印のない節点が $\mathfrak{p} = \text{Lie}(P)$ の Levi 部分に対応している. 以下ではまず [BE89] や [FW04] の方法を用いて, 旗多様体 G/P の次元と第 1 Chern 類 $c_1(G/P)$ を計算する.

旗多様体 G/P の次元は, $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ を固定し, \times 印のない節点に対応する単純ルートの全体を S_P とおくと,

$$\begin{aligned} \dim G/P &= \#(\Phi^+ \setminus \text{Span} S_P) \\ &= \dim G/B - \sum_{S_P \text{ の連結成分}} \dim G'/B' \end{aligned}$$

と計算できる. ただし, Φ^+ は正ルート全体の集合, B は Borel 部分群を表す. また S_P の連結成分とは, \times 印付き Dynkin 図形の \times 印を除いた図形の連結成分に対応する S_P の部分集合のことであり, G', B' はその連結成分の Dynkin 図形に対応する単連結複素単純 Lie 群とその Borel 部分群とする.

次に第 1 Chern 類 $c_1(G/P)$ を計算する. \mathfrak{g} のウェイト λ が P の最高ウェイト表現を定めるとき, その表現から G/P 上の等質線束 $L(\lambda)$ が構成できる. s_α を単純ルート α に対する Weyl 群 W/W_P の単純鏡映とし, 1 次元 Schubert サイクル $X_\alpha = [Bs_\alpha P/P] \simeq \mathbf{P}^1$ 上で $c_1(L(\lambda))$ を積分すれば, 極大トーラス $T \subset G$ の作用に関する局所化公式により 2 つの固定点からの寄与のみが残る [FW04]. すなわち,

$$\int_{X_\alpha} c_1(L(\lambda)) = \lambda - s_\alpha(\lambda) = \langle \lambda, \check{\alpha} \rangle .$$

単純ルート $\{\alpha_j\}$ に対する双対基底 $\{\check{\lambda}_k\}$ を $\langle \alpha_j, \check{\lambda}_k \rangle = \delta_{jk}$ によって定め, 正ルートの和を慣習にならない $2\rho = \sum_{\beta \in \Phi^+} \beta$ と書くとき, G/P の接束 $T_{G/P} = E(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ のウェイト分解を考えて第 1 Chern 類は

$$\begin{aligned} \int_{X_\alpha} c_1(G/P) &= \left\langle \sum_{\beta \in \Phi^+ \setminus \text{Span} S_P} \beta, \check{\alpha} \right\rangle = 2 \left\langle \rho - \sum_{S_P \text{ の連結成分}} \rho', \check{\alpha} \right\rangle \\ &= - \sum_{S_P \text{ の連結成分}} \langle \alpha_k, \check{\alpha} \rangle \langle 2\rho', \check{\lambda}_k \rangle + 2 \end{aligned}$$

と計算できる. 計算に用いる諸量は表 2 にまとめた.

型	$\dim G/B$	$\langle 2\rho, \check{\lambda}_k \rangle$
A_n	$n(n+1)/2$	$k(n-k+1)$
B_n	n^2	$k(2n-k)$
C_n	n^2	$\begin{cases} k(2n-k+1) & (k \neq n) \\ \frac{n(n+1)}{2} & (k = n) \end{cases}$
D_n	$n(n-1)$	$\begin{cases} k(2n-k-1) & (k \neq n-1, n) \\ \frac{n(n-1)}{2} & (k = n-1, n) \end{cases}$
E_6	36	$\begin{array}{cccccc} 16 & 30 & 42 & 30 & 16 & \\ & & \downarrow & & & \\ & & 22 & & & \end{array}$
E_7	63	$\begin{array}{cccccc} 27 & 52 & 75 & 96 & 66 & 34 \\ & & & \downarrow & & \\ & & & 49 & & \end{array}$
E_8	120	$\begin{array}{cccccccc} 58 & 114 & 168 & 220 & 270 & 182 & 92 & \\ & & & & \downarrow & & & \\ & & & & 136 & & & \end{array}$
F_4	24	$\begin{array}{cccc} 16 & 30 & 42 & 22 \\ & & \searrow & \swarrow \\ & & 6 & 10 \end{array}$
G_2	6	$\begin{array}{cc} 6 & 10 \\ \searrow & \swarrow \end{array}$

表 2 単純 Lie 環の諸量

旗多様体の次元と第 1 Chern 類が分かれば, 超曲面公式により 3 次元フラッグ CICY を分類出来る. A 型旗多様体に対する 3 次元フラッグ CICY は [BCFKvS00] においてすでに分類されているので, ここでは B~G 型の旗多様体に対する 3 次元フラッグ CICY を分類することにする. 自明な同型は重複して数えない. 特に $\times \cdots \bullet \cdots \bullet \leftarrow \bullet$ は射影空間, $\times \cdots \bullet \cdots \bullet \rightarrow \bullet$, $\times \cdots \bullet \cdots \bullet \leftarrow \bullet$ は 2 次超曲面, $\bullet \times \cdots \bullet \cdots \bullet \leftarrow \bullet$ は A 型 Grassmann 多様体の超平面と同型なので, これらに対する 3 次元フラッグ CICY はすでに A 型のリスト [BCFKvS00] に登場している. その他の旗多様体に対する 3 次元フラッグ CICY を計算してみれば, A 型と同様に有限個しか出てこないことはすぐに分かる. 表 3 の最後の列は, 旗多様体 G/P の第 1 Chern 類, すなわち反標準因子 $-K_{G/P}$ に対応する類を Picard 群の自然な Schubert 基底によって表すときに, これを $\dim(G/P) - 3$ 個の非負因子で分割する仕方を表す.

Dynkin 図	$\dim G/P$	$-K_{G/P}$	$-K_{G/P}$ の分割
$\times \rightleftarrows \times$	4	(2,2)	(2,2)
$\bullet \rightleftarrows \bullet$	7	(4)	4(1)
$\times \rightleftarrows \bullet$	8	(2,3)	2(1,0)+3(0,1)
$\times \bullet \rightleftarrows \times$	8	(3,4)	(3,0)+4(0,1) (2,1)+(1,0)+3(0,1) (1,2)+2(1,0)+2(0,1) (0,3)+3(1,0)+(0,1) (2,0)+(1,1)+3(0,1) (2,0)+(0,2)+(1,0)+2(0,1) 2(1,1)+(1,0)+2(0,1) (1,1)+(0,2)+2(1,0)+(0,1) 2(0,2)+3(1,0)
$\bullet \rightleftarrows \times$	8	(3,2)	3(1,0)+2(0,1)
$\times \rightleftarrows \times$	9	(2,2,2)	2(1,0,0)+2(0,1,0)+2(0,0,1)
$\times \bullet \bullet \rightleftarrows \times$	13	(4,6)	4(1,0)+6(0,1)
$\bullet \bullet \bullet \rightleftarrows \times$	10	(8)	6(1)+(2)
$\bullet \bullet \leftarrow \times$	6	(4)	2(1)+(2)
$\times \rightleftarrows \bullet$	8	(2,4)	(2,0)+4(0,1) (1,1)+(1,0)+3(0,1) (0,2)+2(1,0)+2(0,1)
$\times \bullet \leftarrow \times$	8	(3,3)	(2,0)+(1,0)+3(0,1) (1,1)+2(1,0)+2(0,1) (0,2)+3(1,0)+(0,1)
$\bullet \rightleftarrows \times$	8	(3,2)	3(1,0)+2(0,1)
$\times \rightleftarrows \times$	9	(2,2,2)	2(1,0,0)+2(0,1,0)+2(0,0,1)
	9	(4,4)	(3,0)+(1,0)+4(0,1) (2,1)+2(1,0)+3(0,1) 2(2,0)+4(0,1) (2,0)+(1,1)+(1,0)+3(0,1) (2,0)+(0,2)+2(1,0)+2(0,1) 2(1,1)+2(1,0)+2(0,1)
	11	(3,3,3)	(2,0,0)+(1,0,0)+3(0,1,0)+3(0,0,1) (1,1,0)+2(1,0,0)+2(0,1,0)+3(0,0,1)
	14	(5,6)	5(1,0)+6(0,1)
$\times \rightleftarrows \bullet$	5	3	(1)+(2)
$\times \rightleftarrows \times$	6	(2,2)	(2,0)+2(0,1) (1,1)+(1,0)+(0,1) (0,2)+2(1,0)

表 3: 3次元フラッグ CICY

続いて，旗多様体 G/P に対し，次数 d_1, \dots, d_r の超曲面の完全交叉として得られる Calabi-Yau 多様体 X の位相不変量の計算を行う．簡単のため Picard 数 1 の場合を考える．[BE89] にあるように， G/B のコホモロジー環の Chevalley 公式 (定理 18 参照) から，旗多様体 G/P の Chern 類は各次数で計算することが出来る．これを用いれば， H を超平面類とするとき

$$c(X) = \frac{c(G/P)}{\prod_{j=1}^r (1 + d_j H)}$$

を用いて G/P 上に引き戻した X の Chern 類も計算出来る．具体的には $d = \sum_j d_j$ として，

$$c_1(X) = c_1(G/P) - dH = 0 \quad (\text{Calabi-Yau 条件})$$

$$c_2(X) = c_2(G/P) + \left(\sum_j d_j^2 - d^2 + \sum_{j < k} d_j d_k \right) H^2$$

$$c_3(X) = c_3(G/P) - d c_2(G/P) \cdot H + \left(d \sum_{j < k} d_j d_k - \sum_{j < k < l} d_j d_k d_l \right) H^3$$

などが言える．これらを用いて位相不変量 H^3 , $c_2 \cdot H$, χ が計算できる．すなわち，

$$\begin{aligned} H^3 &= \int_X H^3 = \left(\prod_j d_j \right) \int_{G/P} H^{\dim G/P} \\ c_2 \cdot H &= \int_X c_2(X) \cdot H = \left(\prod_j d_j \right) \int_{G/P} c_2(X) \cdot H^{\dim G/P - 2} \\ \chi &= \int_X c_3(X) = \left(\prod_j d_j \right) \int_{G/P} c_3(X) \cdot H^{\dim G/P - 3}. \end{aligned}$$

こうして計算した Picard 数 1 の 3 次元フラッグ CICY の位相不変量を，A 型も含めて改めて表 4 にまとめた．

	Dynkin 図形	H^3	$c_2 \cdot H$	χ
\mathbf{P}_5^4	$\times \bullet \bullet \bullet \bullet_5$	5	50	-200
$\mathbf{P}_{2,4}^5$	$\times \bullet \bullet \bullet \bullet_{2,4}$	8	56	-176
$\mathbf{P}_{3^2}^5$	$\times \bullet \bullet \bullet \bullet_{3^2}$	9	54	-144
$\mathbf{P}_{2^2,3}^6$	$\times \bullet \bullet \bullet \bullet_{2^2,3}$	12	60	-144
$\mathbf{P}_{2^4}^7$	$\times \bullet \bullet \bullet \bullet_{2^4}$	16	64	-128
$G(2,5)_{1^2,3}$	$\bullet \times \bullet \bullet_{1^2,3}$	15	66	-150
$G(2,5)_{1,2^2}$	$\bullet \times \bullet \bullet_{1,2^2}$	20	68	-120
$G(2,6)_{1^4,2}$	$\bullet \times \bullet \bullet \bullet_{1^4,2}$	28	76	-116
$G(3,6)_{1^6}$	$\bullet \bullet \times \bullet \bullet_{1^6}$	42	84	-96
$G(2,7)_{1^7}$	$\bullet \times \bullet \bullet \bullet \bullet_{1^7}$	42	84	-98
$OG(2,7)_{1^4}$	$\bullet \times \bullet \bullet_{1^4}$	56	92	-92
$LG(3,6)_{1^2,2}$	$\bullet \bullet \times \bullet_{1^2,2}$	32	80	-116
$OG(5,10)_{1^6,2}$	$\bullet \bullet \bullet \times \bullet_{1^6,2}$	24	72	-116
$G_2/P_{\text{long } 1,2}$	$\times \bullet_{1,2}$	36	84	-120

表 4 3 次元フラッグ CICY (Picard 数 $\rho = 1$) の位相不変量

参考文献

- [AB04] V. Alexeev, M. Brion, *Toric degenerations of spherical varieties*, *Selecta Math. (N.S.)* 10 (2004), no. 4, 453-478.
- [Bat04] V. V. Batyrev, *Toric degenerations of Fano varieties and constructing mirror manifolds*, *The Fano Conference*, 109-122, Univ. Torino, Turin, (2004).
- [BCFKvS98] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *conifold transitions and mirror symmetry for Calabi-Yau complete intersections in Grassmannians*, *Nuclear Phys. B* 514 (1998), no. 3, 640-666.
- [BCFKvS00] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Mirror symmetry and toric degenerations of partial flag manifolds*, *Acta Math.* 184 (2000), no.1, 1-39.
- [BE89] R. J. Baston, M. G. Eastwood, *The Penrose transform. Its interaction with representation theory*, *Oxford Mathematical Monographs*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, (1989).
- [Ber97] A. Bertram, *Quantum Schubert calculus*, *Adv. Math.* 128 (1997), no. 2, 289-305.
- [Cal02] P. Caldero, *Toric degenerations of Schubert varieties*, *Transform. Groups* 7 (2002), no.1, 51-60.
- [CP09] P. E. Chaput, N. Perrin, *On the quantum cohomology of adjoint varieties*, *math.AG/0904.4824*.
- [Ewa96] G. Ewald, *Combinatorial convexity and algebraic geometry*, *Graduate Texts in Mathematics*, 168. Springer-Verlag New York, (1996).
- [Ful93] W. Fulton, *Introduction to toric varieties. Annals of Mathematics Studies*, 131. The William H. Roever Lectures in Geometry. Princeton University Press, Princeton, NJ, (1993).
- [FW04] W. Fulton, C. Woodward, *On the quantum product of Schubert classes*, *J. Algebraic Geom.* 13 (2004), no. 4, 641-661.
- [GL96] N. Gonciulea, V. Lakshmibai, *Degenerations of flag and Schubert varieties to toric varieties*, *Transform. Groups* 1 (1996), no.3, 215-248.
- [Gue08] M. A. Guest, *From quantum cohomology to integrable systems*, *Oxford Graduate Texts in Mathematics*, 15. Oxford University Press, Oxford, (2008).
- [Kim97] B. Kim, *Quantum hyperplane section theorem for homogeneous spaces*, *Acta Math.* 183 (1999), no. 1, 71-99.
- [KT03] A. Kresch, H. Tamvakis, *Quantum cohomology of the Lagrangian Grassmannian*, *J. Algebraic Geom.* 12 (2003), no. 4, 777-810.
- [KT04] A. Kresch, H. Tamvakis, *Quantum cohomology of orthogonal Grassmannians*, *Compos. Math.* 140 (2004), no. 2, 482-500.
- [Kur02] S. Kuroda, *The infiniteness of the SAGBI bases for certain invariant rings*, *Osaka J. Math.* 39 (2002), no. 3, 665-680.
- [Lit98] P. Littelmann, *Cones, crystals, and patterns*, *Transform. Groups* 3 (1998), no.2, 145-179.
- [Oda88] T. Oda, *Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*, 15. Springer-Verlag, Berlin, (1988).
- [Rus08] J. Rusinko, *Equivalence of mirror families constructed from toric degenerations of flag*

- varieties*, Transform. Groups 13 (2008), no.1, 173-194.
- [Stu96] B. Sturmfels, *Grobner bases and convex polytopes*, University Lecture Series, 8. American Mathematical Society, Providence, RI, (1996).
- [SV09] B. Sturmfels, M. Velasco, *Blow-ups of \mathbb{P}^{n-3} at n points and spinor varieties*, math.AG/0906.5096.
- [vEvS06] C. van Enckevort, D. van Straten, *Monodromy calculations of fourth order equations of Calabi-Yau type*, Mirror symmetry. V, 539-559, AMS/IP Stud. Adv. Math., 38, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2006).