第33回 数学カフェ 講演ノート

カメラと代数幾何学 (2021年3月7日講演, 2022年7月8日一部加筆・修正)

三浦 真人

(目次)

カメラと代数幾何学

第1部　ピンホールカメラ模型

目標：ピンホールカメラ模型は射影空間における射影に他ならない。
…これを理解する。

$K = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ … 数の集合（体（たい）という）
$\mathbb{R}$：実数の集合　$\mathbb{C}$：複素数の集合　$i = \sqrt{-1}$

§1.1. 有理写像 (rational map)

… 代数幾何で扱う代数的な"写像"
（厳密には写像ではない）

代数的な関数とは何か？
… 四則演算を使ってかけるもの。

環の世界 ring

(1) 多項式関数　$K \longrightarrow K$
たし算・ひき算・かけ算を使ってかける。

例　$P(x) = 3 - 7x + 2x^2 - 23x^3$
polynomial

数を代入すると値が定まる（関数）

$P(1) = 3 - 7 + 2 - 23 = 25.$

体の世界 field

(2) 有理関数　$K \dashrightarrow K$
わり算も許す。　← 厳密には関数でないので破線矢印で表す。

例　$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{5+2x^2}{1-x}$
多項式

※ 定義されない点もある；　$Q(x) = 0$

"これら以外は代数的でない。"

※ 代数的でない関数の例

解析関数

… 収束べき級数でかける

例 $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

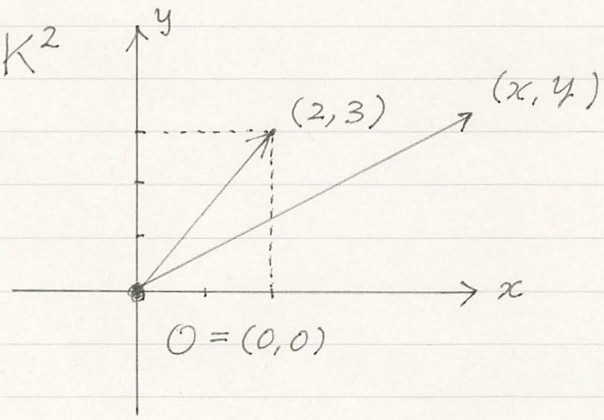
今日は全て代数の話.

多変数にしてみる。

K^n : n 次元数ベクトル空間

n 個の数の組 $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n)$

例 K^2



K^n は、ゼロ・ベクトル $O = (0, 0, \cdots, 0)$ も含む。

(1)' 多項式関数 $K^n \longrightarrow K$

例 $P(x, y) = 2x^2y + y^3 - 3x + 1$

(後のための準備) 各項の次数とは指数の和のこと.

degree

例では $3, 3, 1, 0$.

ゼロでない項の次数が全て等しい多項式を同次多項式という.

homogeneous

(2)' 有理関数 $K^n \dashrightarrow K$

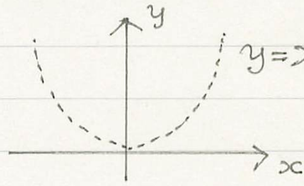
破線矢印

<u>例</u>

$$f(\vec{x}) = \frac{P(\vec{x})}{Q(\vec{x})} = \frac{1+2xy}{y-x^2}$$

※定義されない点もある; $Q(\vec{x})=0$

例では.



$y=x^2$ で定義されない。

<u>定義</u> 有理写像 $K^n \dashrightarrow K^m$ とは、
有理関数を使ってつくられる"写像"

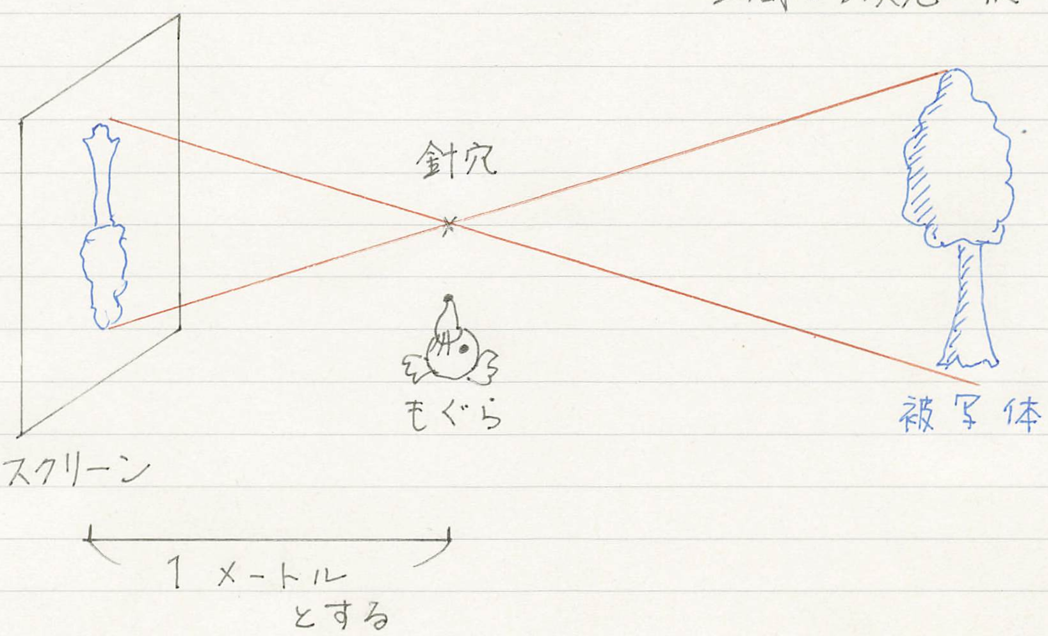
$$\vec{x} \longmapsto \left(f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \cdots, f_m(\vec{x})\right)$$

※定義されない点もある.

§1.2. ピンホールカメラ模型

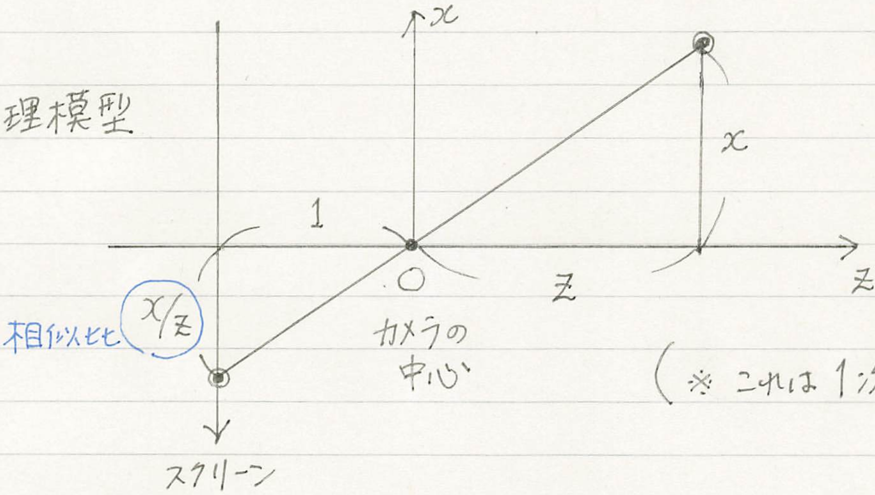
ピンホールカメラ … 針穴を用いる原始的なカメラ

空間は3次元 $\mathbb{R}^3$



スクリーンに映像が写し出される → 写真は2次元 $\mathbb{R}^2$

数理模型



(※ これは1次元落とした図)

ピンホールカメラは $\boxed{\text{有理写像 } \mathbb{R}^3 \dashrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ で表される。} \quad (x, y, z) \longmapsto \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)}$

相似比

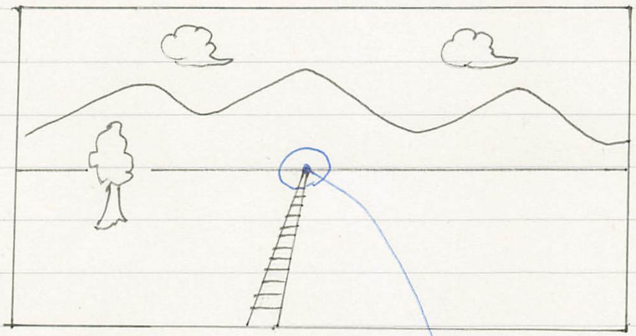
($z=0$) では定義されていない。

… 針穴はもちろん「もぐら」も写真には写らない、という模型である。

その他の注意、
- ※1. 点の行き先のみを見ている。
  (明るさや色などは考えていない。)
- ※2. 前も後ろも写っている。
  (陰に隠れる部分も写っている。)

いずれも必要に応じて追加で処理すればよい。
最も基本的な構造は上の有理写像に含まれている。

写真(2次元)には"消失点"が写っている。



消失点 --- 平行線が交わって見える点。

写真上のどの点も 消失点になり得る。

(例えば、線路が分かれていたら、地平線上の別の点が消失点になる。
山の頂きを皆が指差していたら、山の頂きが消失点になる。)

写真上の点 "$\leftrightarrow$" 消失点
$\mathbb{R}^2$

"$\leftrightarrow$" $\mathbb{R}^3$の「方向」 → $\underline{\underline{\mathbb{P}^2}}$

"$\leftrightarrow$" $\mathbb{R}^3$の「無限遠」 → $\mathbb{P}^3 = \mathbb{R}^3 \sqcup \underline{\underline{\mathbb{P}^2}}$

--- 射影空間 $\mathbb{P}^n$ を導入すると明確に言える。

§1.3. 射影空間
(projective space)

n次元射影空間　$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_K = \mathbb{P}(K^{n+1})$

… K^{n+1} の「方向」(1次元部分空間)の集合

$\Leftrightarrow$ n個の数の比(斉次座標)

$$[\vec{a}] = [a_0 : a_1 : \cdots : a_n]$$
$$= [\lambda a_0 : \lambda a_1 : \cdots : \lambda a_n] \ (\lambda \neq 0)$$ の集合のこと.

ただし ゼロだけの比 $[0:0:\cdots:0]$ は除く。

(一般に n次元 K-ベクトル空間 V に対して $(n>0)$
$n-1$ 次元射影空間 $\mathbb{P}(V)$ が定まる。)

<u>例</u> $\mathbb{P}^0 = \mathbb{P}(K)$ は1点.

$n>0$ で、$\mathbb{P}^n$ は K^n と $\mathbb{P}^{n-1}$ の交差のない合併になる。

記号

$$\mathbb{P}^n = K^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}$$

$a_n \neq 0$ のとき
$\left(\frac{a_0}{a_n}, \cdots, \frac{a_{n-1}}{a_n}\right) \in K^n$
と対応

$a_n = 0$ のとき
$[a_0 : \cdots : a_{n-1}] \in \mathbb{P}^{n-1}$
と対応

<u>例</u> ピンホールカメラ模型の文脈では $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3 \sqcup \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

3次元空間と、「無限遠」平面

<u>定義</u> $\mathbb{P}^n$において同次多項式の共通零点として
定まる図形を(射影)代数多様体という。
algebraic variety

つまり $\{[\vec{x}] \in \mathbb{P}^n \mid \underbrace{P_1(\vec{x}) = \cdots = P_r(\vec{x})}_{} = 0\}$

同次多項式なので
ちゃんと意味をなす。

進んだ注意

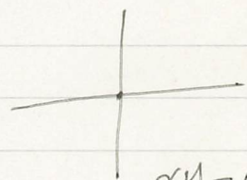
※厳密には、このような図形の中でも性質のよいものを
(射影)代数多様体と呼ぶ。

たとえば、重解で定まるような図形やより基本的な図形に
分解できる図形

$\boxed{\mathbb{P}^2}$

被約でないという

$x^2=0$ ⟿ 2重になった直線。



既約でないという

$xy=0$

⟿ $x=0$と$y=0$に分解できる。

は除いておく。
…こういうものは(射影)スキームという。

$\mathbb{P}^n$の中で$a_n = 0$で定まる図形が無限遠の$\mathbb{P}^{n-1}$
同次1次式

…無限遠超平面という。
⟿ 代数多様体

§1.4. 有理写像（射影空間版）

定義　有理写像 $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ とは、

k 次同次多項式 $P_0(\vec{x}), \cdots, P_m(\vec{x})$ を使ってつくられる"写像"

$$[\vec{x}] \longmapsto [P_0(\vec{x}) : \cdots : P_m(\vec{x})]$$ のことをいう。

※ 定義されない点もある；

$$P_0(\vec{x}) = \cdots = P_m(\vec{x}) = 0$$

※ 定義されている点では適切に定義されている；
well-defined

$[\vec{x}] = [\lambda \vec{x}]$ $\lambda \neq 0$ に対し $[P_0(\vec{x}) : \cdots : P_m(\vec{x})]$

$$= [\underbrace{P_0(\lambda\vec{x})}_{=\lambda^k P_0(\vec{x})} : \cdots : \underbrace{P_m(\lambda\vec{x})}_{=\lambda^k P_m(\vec{x})}] \quad (\lambda^k \neq 0).$$

射影空間の有理写像は、数ベクトル空間の有理写像 $K^n \dashrightarrow K^m$ を無限遠超平面にまで延長したものである。

- $K^n \rightsquigarrow \mathbb{P}^n = K^n \sqcup \mathbb{P}^{n-1}$
- 有理写像 $K^n \dashrightarrow K^m$ $\rightsquigarrow$ 有理写像 $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$

をつくった。

§1.5. ピンホールカメラ模型(射影空間版)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \dashrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x,y,z) & \longmapsto & \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \end{array}$$

を延長して、

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^3 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [x:y:z:w] & \longmapsto & [x:y:z] \end{array}$$

を考える。

実際に元の模型を再現していること:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}^3 & \subset & \mathbb{P}^3 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2 & \supset & \mathbb{R}^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & w\neq 0 & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & z\neq 0 & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x,y,z) & \longmapsto & [x:y:z:1] & \longmapsto & [x:y:z] & \longmapsto & \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \end{array}$$

※定義されないのは $[0:0:0:1]$ という1点だけ。
(カメラの中心)

…つまり、針穴はまだ写らないが、「もぐら」は写る模型になった。

<u>定義</u> 射影空間における射影とは次の有理写像のこと:
(linear) projection

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n & \dashrightarrow & \mathbb{P}^m \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [\vec{x}] & \longmapsto & [A\vec{x}] \end{array} \quad (m<n)$$

A は階数最大の(rank) $(m+1)\times(n+1)$ 行列.

※ 行列 A も、そのスカラー倍 λA $(\lambda \neq 0)$ も同じ有理写像を定める。

※ 定義されない点の集合は、

$$\mathbb{P}(\underbrace{\ker A}_{A\vec{x}=0 \text{ となる } \vec{x} \text{ のなすベクトル空間}})$$

とかける。

--- 射影の中心 (center) という

ピンホールカメラ模型は射影空間における射影に他ならない。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^3 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [x:y:z:w] & \longmapsto & [x:y:z] \end{array}$$ の場合。

$$A \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ カメラ行列 (camera matrix) という

$$\ker A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix} \middle| \, w \in \mathbb{R} \right\}$$ 1次元部分ベクトル空間.

$$\mathbb{P}(\ker A) = \{ [0:0:0:1] \}$$ 1点のみ.

射影の中心 $=$ カメラの中心 (針穴)

第2部　n次元形状の再構成問題

目標：再構成問題には幾何学的な階層性が備わっている。
--- これを理解する。

§2.1. 再構成の手続き

出発点：　複数枚の写真と手がかり.

↓

射影再構成

↓

アフィン再構成

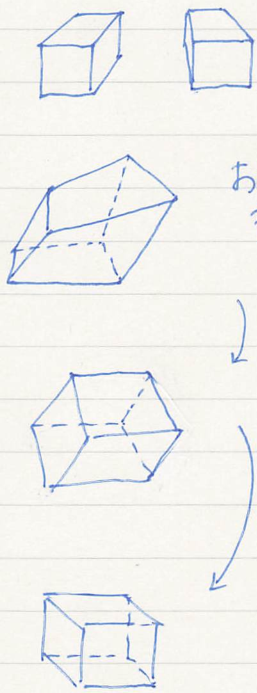
↓

計量再構成

↓

より高次の情報の再構成
（材質、運動、etc...）

幾何学に相当する部分



← 同じ被写体の写真

おおざっぱな形状の再構成

徐々に詳しい形状を再構成する.

今回扱うのはここ。

§2.2. 幾何学とは何か.

エルランゲン・プログラムの思想 (by Felix Klein)

「幾何学とは、空間 X と対称性の群 G の組

(X, G) に対して、G で不変な性質を調べる学問である。」

モデル
という.

対称性の
変換を集めた集合

群
group

例 ユークリッド空間 $E^n = (K^n, \mathrm{Euc}K^n)$
Euclidean space

$\mathrm{Euc}K^n$: ユークリッドの合同変換群

つまり K^n の平行移動と回転、鏡映

$\boxed{\text{不変量 } (K = \mathbb{R} \text{ のとき})}$ ・・・ 長さ、角度、体積 など.

例 K-ベクトル空間 $V = (K^n, GL(n, K))$

$GL(n, K)$: 一般線形変換群

つまり正則行列を用いた線形変換
(階数 n の $n \times n$ 行列)

$\boxed{\text{不変量}}$ ・・・ 次元、部分空間 など.

§2.3 再構成問題における空間のモデル

射影空間 $\mathbb{P}^n$ 上の付加構造を考える。

$H \subset \mathbb{P}^n$ --- 無限遠超平面
(たとえば $x_n = 0$)

$Q \subset H$ --- 絶対2次超曲面
(たとえば $x_0^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = 0$)

Qを含む$\mathbb{P}^n$の2次超曲面を(超)球と呼ぶ。
sphere

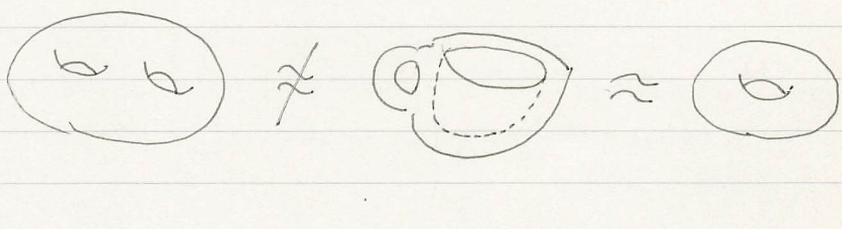
① 射影空間 $(\mathbb{P}^n, PGL(n+1, K))$

$PGL(n+1, K)$: 射影変換群

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [\vec{x}] & \longmapsto & [A\vec{x}] \end{array} \quad \text{全単射}$$

A: $(n+1) \times (n+1)$ 正則行列

$\boxed{\text{不変量}}$ --- 図形の配置，交わり方，接し方，直線，穴の数（位相不変量）など



② アフィン空間 $(K^n, \mathrm{Aff}(n,K))$

$\mathrm{Aff}(n,K)$: アフィン変換群

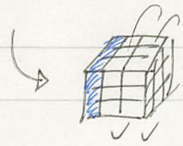
K^nの平行移動と一般線形変換

Fact $K^n = \mathbb{P}^n \setminus H$ (Hを除いた集合) と見なすとき、

アフィン変換とは、$\mathbb{P}^n$の射影変換で

無限遠超平面 $H \subset \mathbb{P}^n$ を保つもののこと。

(つまり $\mathbb{P}^n \setminus H$ も保つ。)



ルービックキューブで1つの面を保つように動かすと、他のキューブたちが集合として保たれるのと一緒。

$\boxed{\text{不変量 }(K=\mathbb{R}\text{のとき})}$ --- 平行性、体積比、重心など。

射影空間には「平行」という概念が無かったが、

無限遠超平面Hという付加構造を加えることで、

H上でのみ交わる線形部分多様体 (直線や平面など) の対は、

「平行」と呼べるようになった。

③ ワイル空間 $(K^n, \mathrm{Sim}(n, K))$

$\mathrm{Sim}(n, K)$: 相似変換群

K^nの平行移動と回転、鏡映、拡大・縮小

Fact　$K^n = \mathbb{P}^n \setminus H$ と見なすとき、

相似変換とは、$\mathbb{P}^n$の射影変換で
絶対2次超曲面 $Q \subset \mathbb{P}^n$ を保つもののこと。
(Hも保つ。つまり $\mathbb{P}^n \setminus H$ も保つ。)

$K = \mathbb{R}$ のとき、Q は空集合であるが
定義式として考える。
(あるいは $K = \mathbb{C}$ と思うことにする。)

不変量 ($K = \mathbb{R}$ のとき)

--- 長さの比、角度など。

(アフィン空間では平行でない2つの線分の長さを
比較できなかったが、絶対2次超曲面 Q という
付加構造を加えることで、同じ超球の半径は
等しい、などと言えるようになった。
ユークリッド空間にするには、さらに「メートル原器」が必要。)

§2.4. 再構成問題の階層性

射影再構成 ： 射影不変量まで再構成する手続き.

$(\mathbb{P}^n, PGL(n+1; K))$

Hを見つける ↓

アフィン再構成 ： アフィン不変量まで 〃

$(\mathbb{P}^n \setminus H, \mathrm{Aff}(n, K))$

Qを見つける ↓

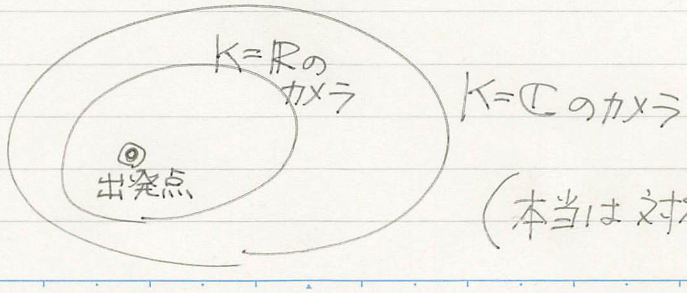
計量再構成 ： 相似不変量まで 〃

$(\mathbb{P}^n \setminus H, \mathrm{Sim}(n, K))$

対称性を除いて一意的に再構成できるとき、
それぞれの再構成が可能である、という。

※ $K = \mathbb{C}$ で再構成が可能であれば、
$K = \mathbb{R}$でも再構成が可能。

(実際、出発点が $K = \mathbb{R}$ のカメラなら、
(有理写像)
$K = \mathbb{C}$ で一意的に再構成されたカメラは、
出発点のカメラと一致するはず。)



(本当は対称性についても考える)

進んだ注意

※ $K=\mathbb{C}$ を考えるメリットはたくさんある。

たとえば、

- 交差のロバストネス

  $\mathbb{C}$ 上では交点数という概念が
  intersection number
  大活躍する。

  [参考] ベズー (Bézout) の定理

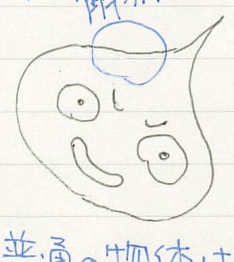
d_1 次曲線と d_2 次曲線は
必ず (重複度込みで)
d_1d_2 点で交わる。

- 複素射影空間の解析的閉部分空間は、
  代数多様体になる。

  つまり $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ では代数的な手法で
  解析的なものまで調べられてしまう!

  [参考] 周 (Chow) の定理

  GAGA 型の定理
  (Géometrie Algébrique et
  Géométrie Analytique)



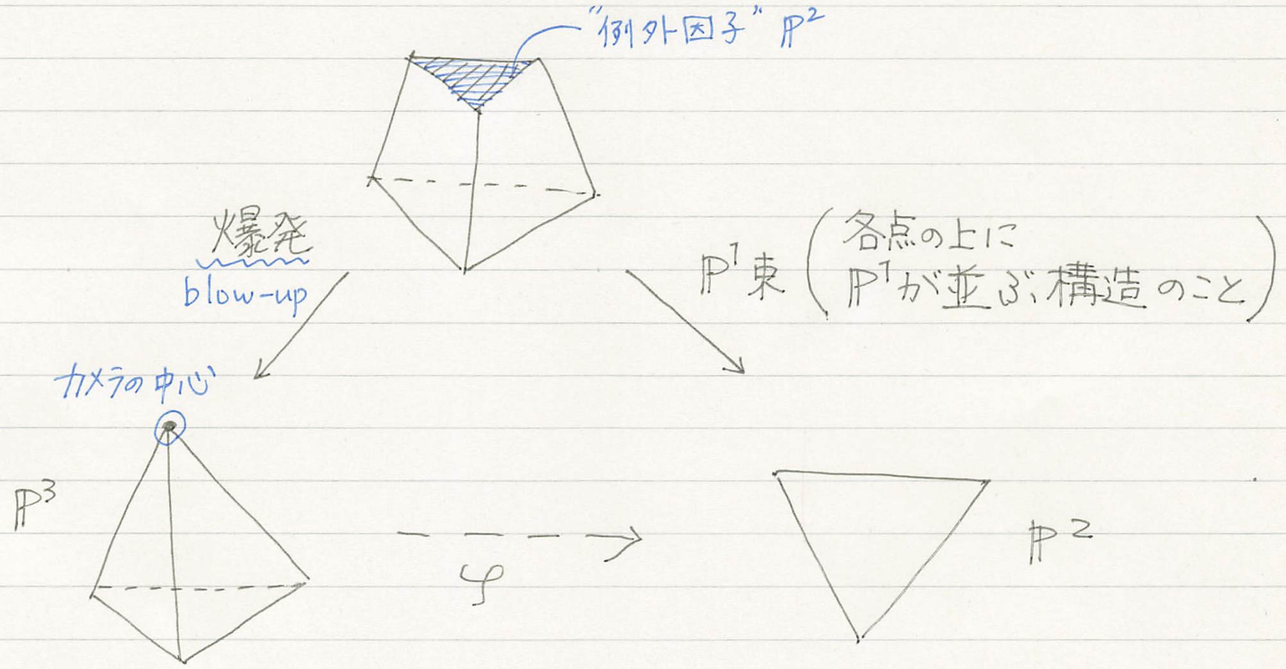
普通の物体は
全然代数的でないのに…
調べられる!

第3部 ピンホールカメラ模型再論 ($K=\mathbb{C}$ とする)

目標：ピンホールカメラ模型のグラフは線形多様体の爆発である。

--- これを次の概略図で理解する。

ピンホールカメラ $\varphi: \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ のグラフ



関係する幾何学

・トーリック幾何 (X, T^n)
　X：トーリック多様体　T^n：代数的トーラス

・双有理幾何 $(X, \mathrm{Bir}(X))$
　X：代数多様体　$\mathrm{Bir}(X)$：双有理変換群

(本当はさらに粗く見る)

§3.1. トーリック多様体

$T^n := (K^\times)^n$　n次元代数的トーラス

$= \{ n$個のゼロでない数の組 $\vec{t} = (t_1, \cdots, t_n) \}$.

かけ算

$$\vec{s} \cdot \vec{t} = (s_1, \cdots, s_n) \cdot (t_1, \cdots, t_n) = (s_1 t_1, \cdots, s_n t_n).$$

単位元

$$id_{T^n} = (1, \cdots, 1).$$

逆元

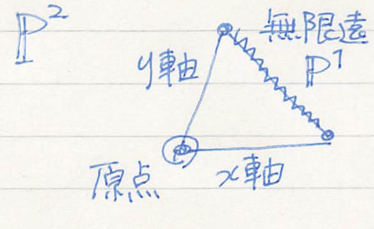
$$\vec{t}^{\,-1} = (t_1, \cdots, t_n)^{-1} = (t_1^{-1}, \cdots, t_n^{-1})$$

$\rightsquigarrow$ 群になる。

$T^n \subset K^n \subset \mathbb{P}^n$　　射影空間$\mathbb{P}^n$全体の

$\vec{t} = [t_1 : \cdots : t_n : 1]$　　変換群にもなっている。

$(\mathbb{P}^n, T^n)$の不変量 --- 座標平面、固定点など。



↙ 構造が捉えやすくなっている。

(後でもう1度見る)

<u>定義</u>　(射影)トーリック多様体とは、

単項式のみでつくられる有理写像

$$\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^N$$

$$[x_0 : \cdots : x_n] \mapsto [\vec{x}^{\vec{a}^{(0)}} : \cdots : \vec{x}^{\vec{a}^{(N)}}]$$

の像(の閉包)のことをいう。(代数多様体になる。)

点列の収束先を
付け加えたもの

ここで $\vec{x}^{\vec{a}} := x_0^{a_0} \cdots x_n^{a_n}$ とした。

※ 技術的かつ進んだ注意

この定義だと正規でないトーリック多様体も含まれてしまう。
normal

このクラスは扱いにくいので、通常は、十分たくさん
(非常に豊富, very ample)

格子点を含む整凸多面体 $\triangle$ に対して、

$\triangle$ の格子点を用いてつくられる有理写像のみを用いて

トーリック多様体を定義する。

今回扱う例は全てこの条件を満たしている。

とくに、T^n に制限した有理写像が

$$[t_1 : \cdots : t_n : 1] \longmapsto [\vec{t}^{\vec{a}^{(1)}} : \cdots : \vec{t}^{\vec{a}^{(N)}}]$$

$$\triangle \cap \mathbb{Z}^n = \{\vec{a}^{(1)}, \cdots, \vec{a}^{(N)}\}$$

$\triangle$ は
ある n 次元
整凸多面体

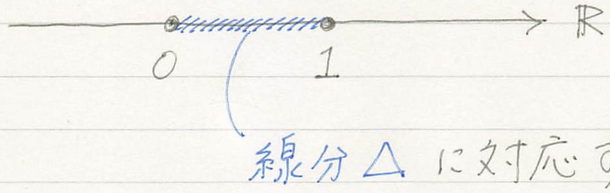
とかけるとき、像のトーリック多様体を $\mathbb{P}_\triangle$ とかく。

§3.2. 射影空間（トーリック多様体として）

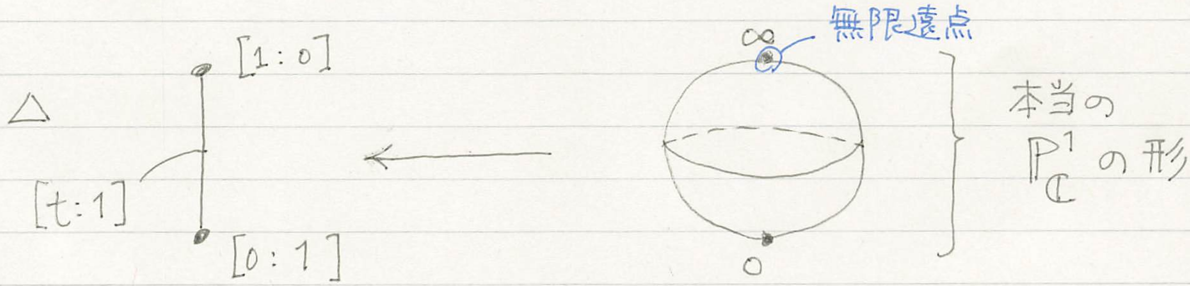
<u>例</u>

$$\begin{array}{ccccc} T^1 & \subset & K^1 & \subset & \mathbb{P}^1 \\ t\neq 0 & & \psi & & \psi \\ t & \longmapsto & t & \longmapsto & [t:1] \end{array}$$

t の指数は 1 と 0

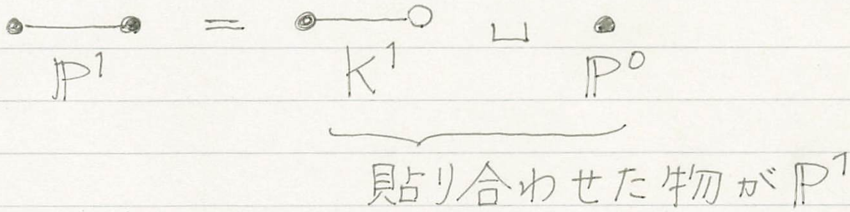


多面体 $\triangle$ を用いて、$\mathbb{P}_\triangle$ の構造を記述できる。



$\mathbb{P}^1 = K^1 \sqcup \mathbb{P}^0$ だった（$\mathbb{P}^0$：無限遠点）

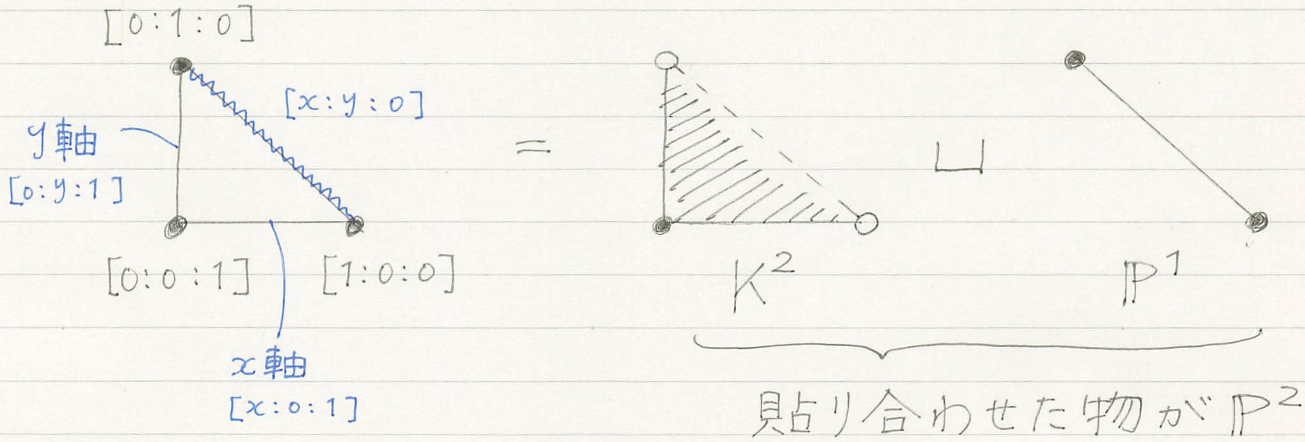
多面体の方でもちゃんと見えている。



例　$\mathbb{P}^2$の場合も同様.

$$\begin{array}{ccc} T^2 & \hookrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (t_1, t_2) & \longmapsto & [t_1 : t_2 : 1] \end{array}$$

指数：$(1,0), (0,1), (0,0)$



⟿ 一般に射影空間が
単体として記述される。

§3.3. 射影空間の直積

それぞれの点の組の集合.

セグレ(Segre)埋め込み

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m & \longrightarrow & \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}. \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ ([x_0 : \cdots : x_n], [y_0 : \cdots : y_m]) & \longmapsto & [\underbrace{x_0 y_0 : x_0 y_1 : \cdots : x_n y_m}_{\text{全部の組み合わせ}}] \end{array}$$

を用いる。

例　$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3$

$$\left([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]\right) \longmapsto [x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1]$$

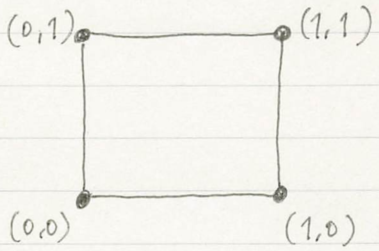
変数のかけ算 $\longleftrightarrow$ 指数のたし算

$(0,0)$　　$(0,0)$

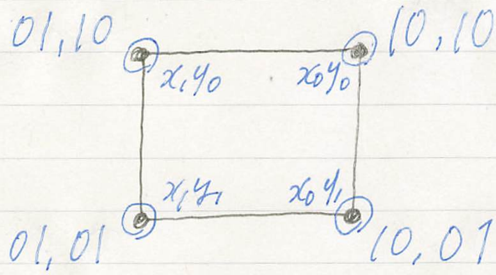
$(1,0)$　　$(0,1)$

$\rightsquigarrow$ 全部の組み合わせを考えると、

次の多面体で記述されることが分かる：



斉次座標で見ると、



10,10 $\cdots$ $([1:0],[1:0])$ という意味の略記

$\rightsquigarrow$ 一般に $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ が

n 次元単体と m 次元単体の直積

として記述される。

§ 3.4. 射影のグラフ（線形多様体の爆発）

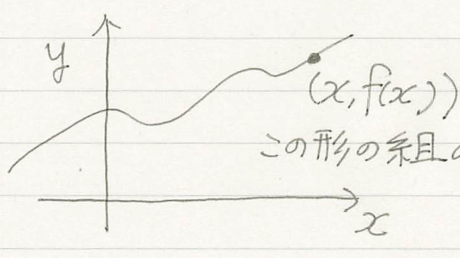
射影空間における射影

例
$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ p := [x:y:z] & \longmapsto & [x:y] \end{array}$$

のグラフとは、
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ p & \longmapsto & (p, \varphi(p)) \end{array}$$
の像の閉包のこと。

有理写像ならではの部分

（参考：普通の関数のグラフ



この形の組の集合がグラフだった。）

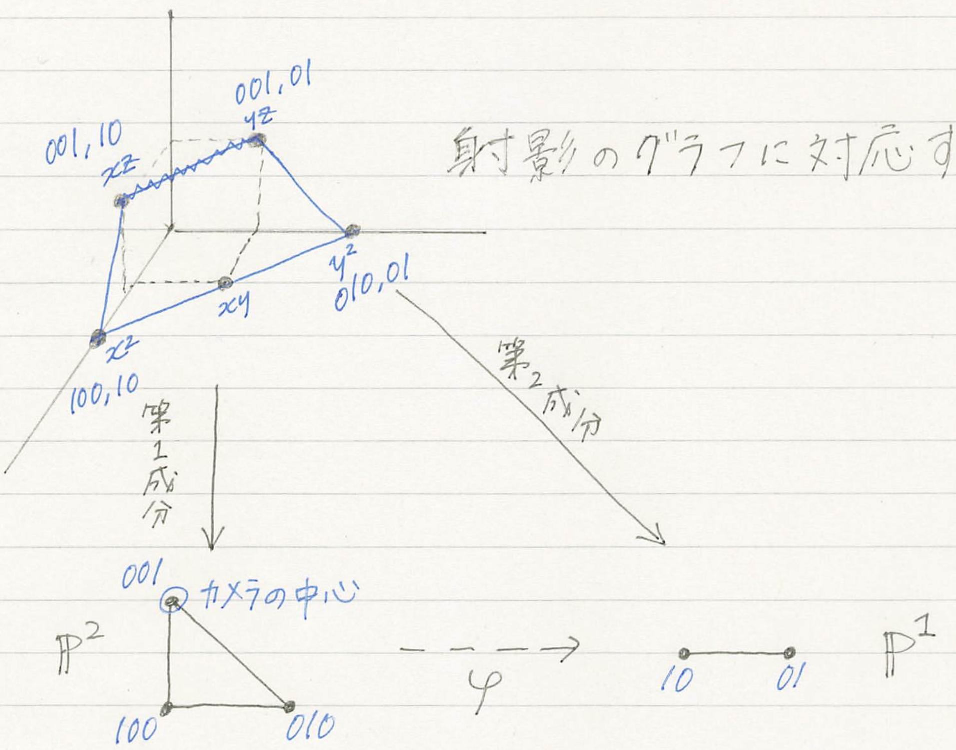
例では、
$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\text{セグレ埋め込み}} & \mathbb{P}^5 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [x:y:z] & \mapsto & ([x:y:z],[x:y]) & \longmapsto & [x^2 : xy : xy : y^2 : xz : yz] \end{array}$$

重複.

指数の集合は、

$(2,0,0), (1,1,0), (0,2,0), (1,0,1), (0,1,1).$

射影のグラフに対応する多面体



⇝ カメラの中心
(φが定義されていない点)
が

$\mathbb{P}^1$に置き換わっている。

例外因子という
(exceptional divisor)

これが爆発と
blow-up
呼ばれる操作。

また、グラフから$\mathbb{P}^1$へはちゃんとした写像
がある。

一般の射影についても同様。 → 例外因子は $\mathbb{P}(\ker A) \times \mathbb{P}^m$
$n-m-1$次元

爆発で例外因子に置き換えられる集合のことを

爆発の中心という。
center

$\mathbb{P}(\ker A)$

爆発の中心 = 射影の中心 = カメラの中心
(針穴)

No. 26

ここまでにやったこと.

ピンホールカメラを有理写像 $K^n \dashrightarrow K^m$ で表した。

--- 針穴や「もぐら」が写らなかった。

空間 K^n を射影空間 $\mathbb{P}^n$ に拡げ、
ピンホールカメラを射影 $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^m$ で表した。

--- 「もぐら」は写るようになったが、針穴は写らなかった。

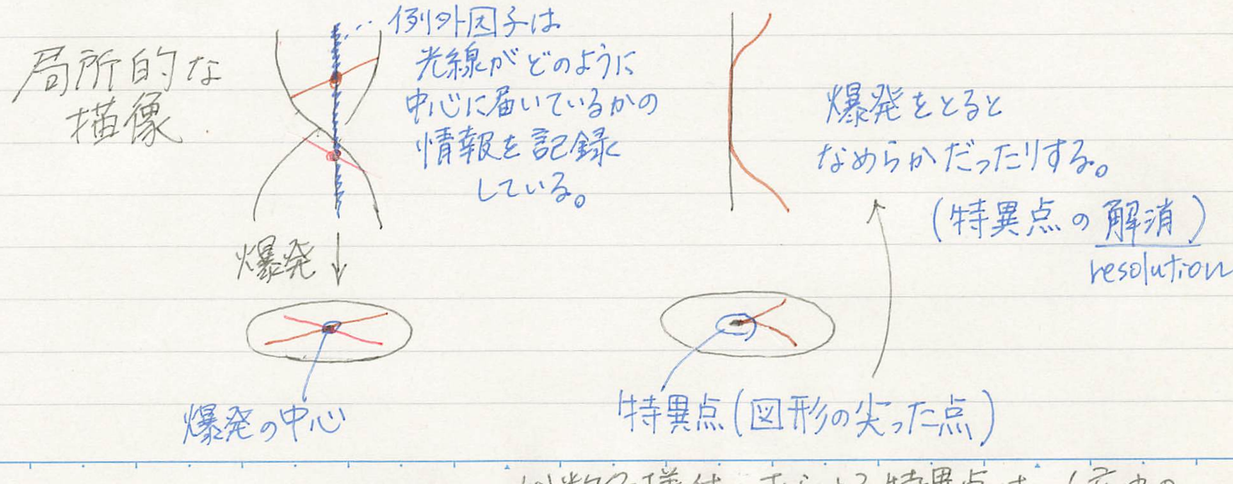
射影空間 $\mathbb{P}^n$ を爆発することで、さらにつくり変え、
ピンホールカメラをグラフからの写像 $\mathbb{P}_\Delta \longrightarrow \mathbb{P}^m$ で表した。

--- 写らない点は無くなった。

※ 爆発は双有理写像（大部分の点で1対1の有理写像）

--→ 双有理幾何では、この違いを無視して、大雑把な性質（Bir X の不変量）を調べる。

※ 爆発は代数多様体の特異点を解消するのに使われる。



[参考] 代数多様体のあらゆる特異点は爆発を繰り返して解消できる。（広中の特異点解消定理）

第4部 多視点幾何学における射影再構成問題

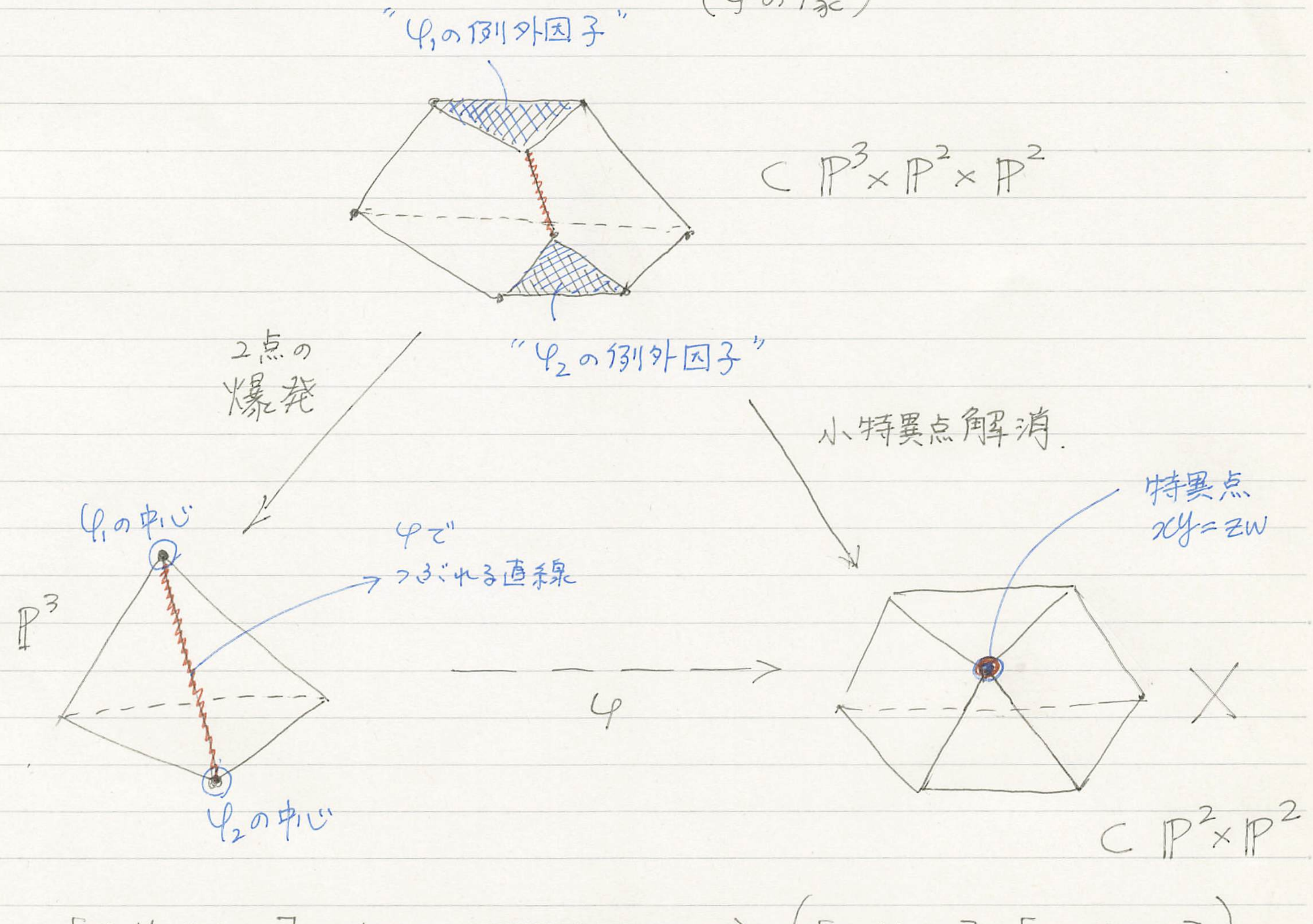
multiple view geometry

目標：3次元の射影再構成が可能なことには幾何学的な理由がある。
--- これを次の概略図を通じて理解する。

ピンホールカメラの組

$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ のグラフ

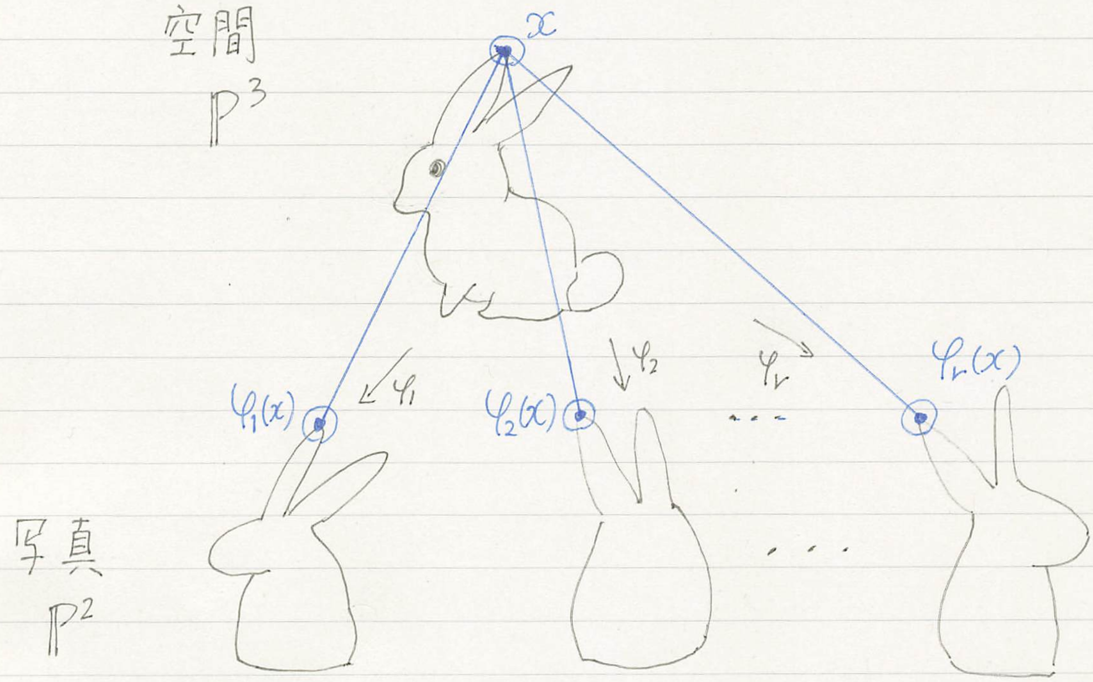
双有理. X (φの像)



$[x : y : z : w] \longmapsto ([x : y : z], [x : y : w])$

§4.1. 点対応とマルチビュー多様体

r 個のカメラに対する点対応
point correspondence



同じ点 x の像として得られる点の組

$(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_r(x))$ のこと.

$\in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \cdots \times \mathbb{P}^2$

点対応は
射影空間の直積に含まれる。

$$\begin{array}{cccc} \varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_r) : & \mathbb{P}^3 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2 \times \cdots \times \mathbb{P}^2 \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_r(x)) \end{array}$$

の像の閉包は代数多様体である。

$X \subset \mathbb{P}^2 \times \cdots \times \mathbb{P}^2$ マルチビュー多様体という。

"r 個のカメラに対する点対応を集めた図形"

§4.2. 射影再構成の手続き

点対応を見つける。

↓

マルチビュータ様体

$X \subset \mathbb{P}^2 \times \cdots \times \mathbb{P}^2$

を特定する。

↓

ここを見る

$\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_r)$

を再構成する。

現実のアルゴリズム

実際にはXの記述が大変なので迂回するアルゴリズムが用いられている。

"マルチフォーカルテンソル"

を特定する。

実は1対1

φ^{-1}も分かる。(ただし射影変換を除いて)

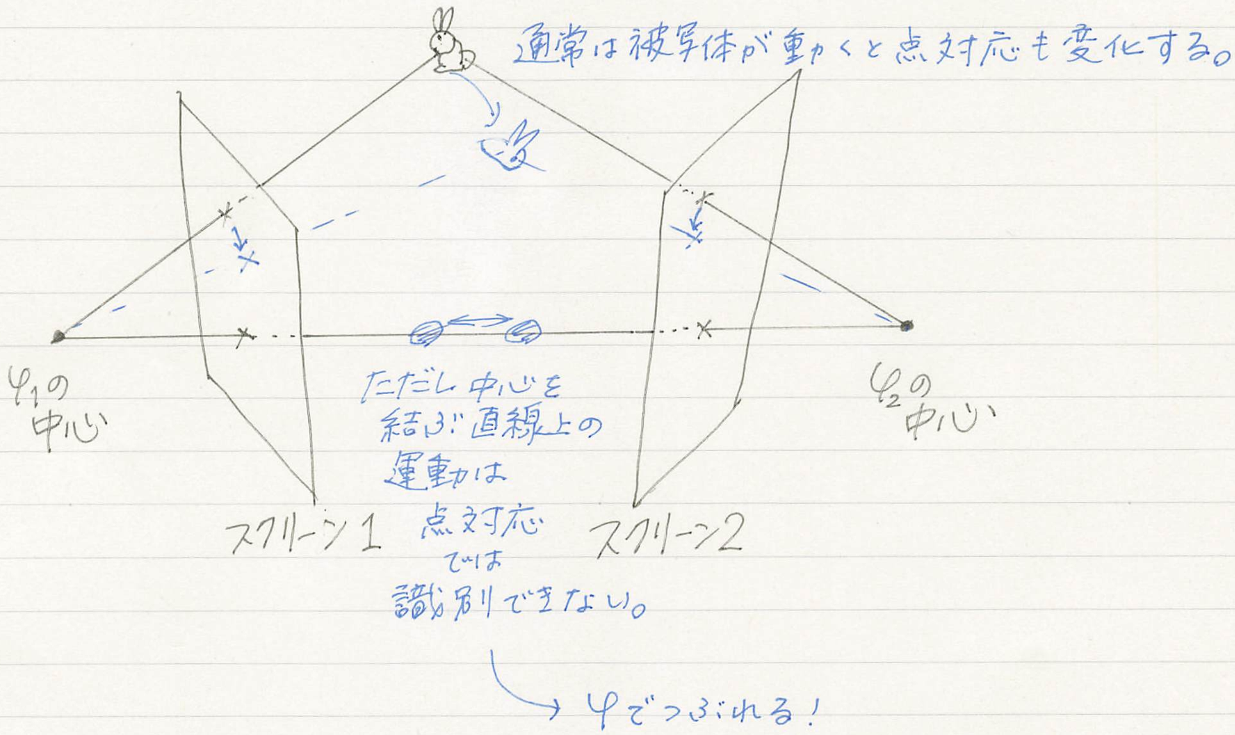
点対応に対して
空間$\mathbb{P}^3$の点を
プロットする有理写像.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^3 \arrow[r, dashed, "\varphi"] & X \\ \mathbb{P}^3 \arrow[u, "g"] \arrow[ur, dashed, "\varphi\circ g"'] & \end{tikzcd}$$

この2つはXだけからは
原理的に区別できない。

§4.3. 2視点の幾何学（エピポーラ幾何学）

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow X \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$$

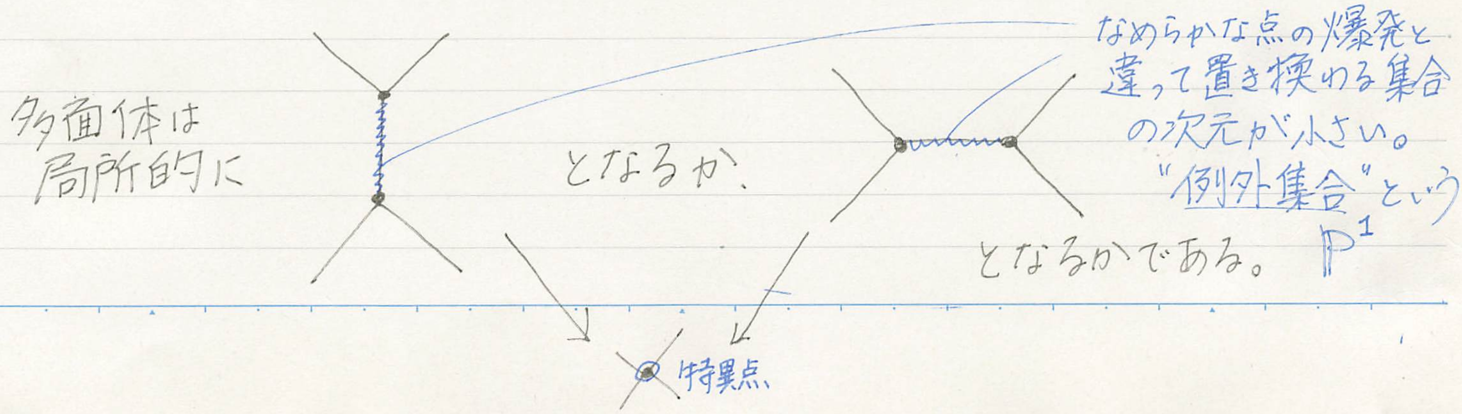


マルチビュー多様体は $(xy = zw \text{ in } K^4)$ という形の

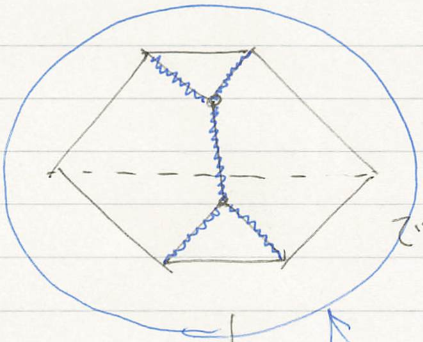
特異点を持つ。

{ コニフォールド
{ 通常2重点　　などと呼ばれる。

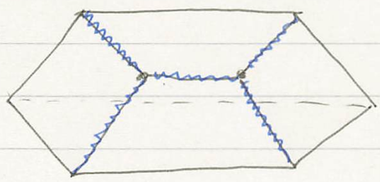
Fact　通常2重点の爆発による特異点解消は2通りしかない。



Xの形を踏まえると、得られる多面体は



であるか



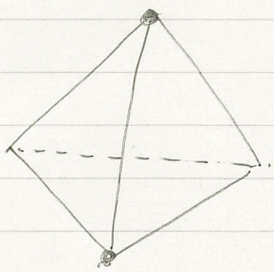
であるかだが、

こちらは射影のグラフになり得ない。

つまり一意的に特異点解消を見つけられる。

さらに、この2点爆発の写像も一意的である。

$\mathbb{P}^3$



$\rightsquigarrow$ したがって射影再構成が一意的に可能であることが分かった。

同様の議論がほとんどの場合に適用できる。

§4.4. 射影再構成定理

仮定 $n < \sum_{i=1}^{r} m_i$ とする

さもないと点対応が情報を与えない。

定理（伊藤・植田・M- 2020）

$K=\mathbb{R}$ または $K=\mathbb{C}$ で

一般的な射影の組 $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_r):\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{m_1}\times\cdots\times\mathbb{P}^{m_r}$ に対して、マルチビュー多様体からの射影再構成が一意的に可能である。

ただし、$r=n+1$, $\vec{m}=(1,\dots,1)$ のときのみ例外で、2通りの再構成がある。

たとえば4次元なら3枚の写真($\mathbb{P}^2$)の点対応から再構成可能となる。

§4.5. 三つ目の平面人は2つの世界を区別できない?

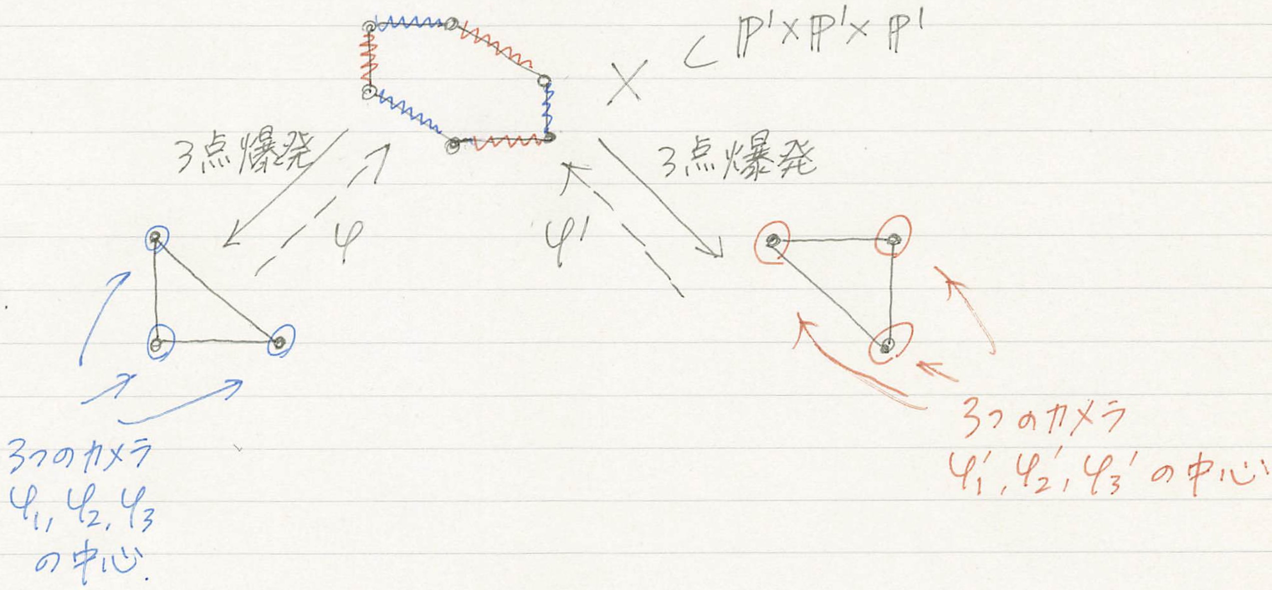
例外に当たる例を観察する。

例

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

$$[x:y:z] \longmapsto ([x:y], [x:z], [y:z])$$

この場合、3点爆発のグラフと、マルチビュー多様体 X は同型.



Xだけ見ていても φ と φ' を区別できない!!

ここで、$\varphi' = (\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3') : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

$$[x':y':z'] \longmapsto ([y':x'], [z':x'], [z':y'])$$

2つの射影再構成は

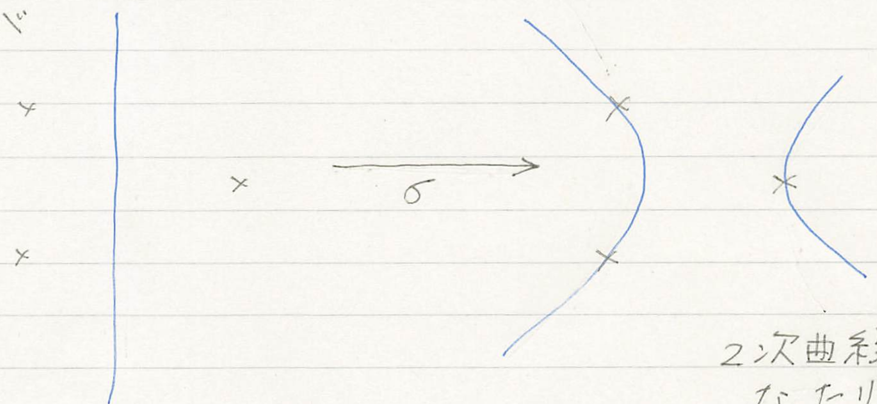
標準クレモナ変換 と呼ばれる次の双有理変換で関係している。
standard Cremona transform.

$$[x:y:z] \longmapsto [x':y':z'] = \left[\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}\right]$$
$$= [yz : xz : xy]$$

σは3つのカメラの中心で定義されない有理写像.
(とくに射影変換では移り合わない。)

※ 射影不変量も σ では保たれない。

(たとえば、直線が



2次曲線に
なったりする。)

※ σは$\mathbb{P}^2$の双有理幾何を"統制している"。

[参考] ネーター・カルテルヌオーボ (Noether − Castelnuovo) の定理.
$\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ は射影変換と σ によって生成される。

三つ目の平面人にとっては双有理不変量だけが大切なのかもしれない。 おしまい