Calabi–Yau 超曲面の幾何転移

Geometric transitions for Calabi–Yau hypersurfaces

三浦 真人　(京都大学数理解析研究所)

2022 年度年会のアブストラクトと同一

本講演において、Calabi–Yau 多様体とは高々標準特異点を持つ正規射影代数多様体 Y であって、$K_Y = 0$ かつ $H^i(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$（$0 < i < \dim Y$）を満たすものを指す。双有理幾何や超弦理論との関わりから、複素 3 次元非特異 Calabi–Yau 多様体（以下、Calabi–Yau 3-fold）にとりわけ興味がある。

すべての Calabi–Yau 3-fold が幾何転移と呼ばれる操作でつながることを期待する有名な予想が *Reid's fantasy* である。ここで、二つの Calabi–Yau 3-fold（あるいは一般の Calabi–Yau 多様体）Y_1, Y_2 をつなぐ幾何転移とは、一方は双有理収縮、一方は平坦退化によって、共通の Calabi–Yau 多様体 $\overline{Y}$ を経由して、Y_1, Y_2 を結びつける操作のことをいう。幾何転移を次のような概略式で表すことにする：

$$Y_1 \to \overline{Y} \leftsquigarrow Y_2,$$

ここで、$Y_1 \to \overline{Y}$ は双有理収縮、$Y_2 \rightsquigarrow \overline{Y}$ は複素変形による平坦退化を表す。

トーリック多様体の超曲面として記述される Calabi–Yau 多様体（以下、Calabi–Yau 超曲面）は、Calabi–Yau 多様体のもっとも基本的なクラスの一つであり、その性質がよく調べられている。中でも、反射的多面体 Δ の定める Calabi–Yau 超曲面 Y_Δ に対しては、各次元での変形族の有界性や、Batyrev によるミラー対称性 $Y_\Delta \leftrightarrow Y_{\Delta^*}$ も確立されている。さらに、反射的多面体の包含関係 $\Delta \subset \Delta'$ は、幾何転移

$$Y_{\Delta,\Sigma} \to Y_{\Delta,\Sigma'} \leftsquigarrow Y_{\Delta',\Sigma'}$$

を定めることが証明できる。ここでの記号を説明するため、二つの組み合わせ論的な概念を導入しておく。一つは、good pair (Δ_1, Δ_2) とそれに付随する Calabi–Yau 多様体 Y_{Δ_1,Δ_2} であり、Artebani–Comparin–Guilbot [ACG16] により導入された。多面体の対 (Δ_1, Δ_2) が *good pair* であるとは、Δ_1 と Δ_2^* が標準多面体（つまり内部格子点として原点のみを含む整凸多面体）であって、$\Delta_1 \subset \Delta_2$ を満たすときをいう。good pair (Δ_1, Δ_2) に対して、Newton 多面体 Δ_1 を持つ一般的な Laurent 多項式 f_{Δ_1} と、射影トーリック多様体 X_{Δ_2} を用いて、

$$Y_{\Delta_1,\Delta_2} \coloneqq \overline{\{f_{\Delta_1} = 0\}} \subset X_{\Delta_2}$$

という零点集合の閉包を考えると、これが Calabi–Yau 多様体になる。反射的多面体 Δ の定める Calabi–Yau 超曲面とは $Y_\Delta = Y_{\Delta,\Delta}$ のことである。もう一つの概念は、Fredrickson [Fre15] により導入された *projective Δ_2^*-maximal fan* Σ_2 である。これは、Δ_2^* のゼロでない格子点すべてを 1 次元錐として用いる射影単体的完備扇のことである。projective Δ_2^*-maximal fan Σ_2 は、多面体 Δ_2^* の各面が張る錐を集めた射影完備扇 $\Sigma(\Delta_2^*)$ の細分となる場合には、MPCP 細分とも呼ばれる。Y_{Δ_1,Δ_2} の定義において X_{Δ_2} の代わりに射影トーリック多様体 X_{Σ_2} の中で閉包を取っても、Calabi–Yau 多様体 Y_{Δ_1,Σ_2} が得られる。以上が、幾何転移 $Y_{\Delta,\Sigma} \to Y_{\Delta,\Sigma'} \leftsquigarrow Y_{\Delta',\Sigma'}$ に使われた記号の説明である。4 次元反射的多面体の場合は、これが Calabi–Yau 3-fold の幾何転移になることも言える。

今回報告するのは、反射的多面体の包含関係 $\Delta \subset \Delta'$ を good pair のカバー関係（非自明な包含関係の最小単位）の有限列

$$\begin{tikzcd}
\Delta \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & \Delta \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & \cdots \arrow[r, equal] & \Delta = \Delta'_p \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & \Delta'_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \Delta' \arrow[d, equal] \\
\Delta \arrow[r, hook] & \Delta_1 \arrow[r, hook] & \cdots \arrow[r, hook] & \Delta_q = \Delta' \arrow[r, equal] & \cdots \arrow[r, equal] & \Delta' \arrow[r, equal] & \Delta',
\end{tikzcd}$$

に分解することで、Calabi–Yau 超曲面の幾何転移を基本的な収縮と退化に分解して調べるアプローチについての進捗状況である。上式の各列が good pair であり、$\Delta' \supset \Delta'_1 \supset \cdots \supset \Delta'_p$ と $\Delta^* \supset \Delta^*_1 \supset \cdots \supset \Delta^*_q$ は、標準多面体のカバー関係の列となる。対応して（$\mathbb{Q}$ 分解的で端末的特異点しか持たない）射影トーリック多様体の双有理射と、Calabi–Yau 超曲面の幾何転移の分解が次のように得られる：

$$\begin{tikzcd}
X_\Sigma \arrow[r, "f_0"] & X_{\Sigma_1} \arrow[r, "f_1"] & \cdots \arrow[r, "f_{q-1}"] & X_{\Sigma'} \arrow[r, equal] & \cdots \arrow[r, equal] & X_{\Sigma'} \arrow[r, equal] & X_{\Sigma'} \\
Y_{\Delta,\Sigma} \arrow[r] \arrow[u, hook] & Y_{\Delta,\Sigma_1} \arrow[r] \arrow[u, hook] & \cdots \arrow[r] & Y_{\Delta,\Sigma'} \arrow[u, hook] & \cdots \arrow[l, squiggly] & Y_{\Delta'_1,\Sigma'} \arrow[l, squiggly] \arrow[u, hook] & Y_{\Delta',\Sigma'}, \arrow[l, squiggly] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

ここで、Σ_j は projective Δ^*_j-maximal fan である。図式に登場する標準多面体のカバー関係には、次の 3 種類の基本的な操作が付随している；トーリック多様体の双有理射 $X_{\Sigma_j} \to X_{\Sigma_{j+1}}$（toric Kähler part）、Calabi–Yau 多様体の双有理射 $Y_{\Delta,\Sigma_j} \to Y_{\Delta,\Sigma_{j+1}}$（Calabi–Yau Kähler part）、Calabi–Yau 多様体の平坦退化 $Y_{\Delta'_j,\Sigma'} \rightsquigarrow Y_{\Delta'_{j+1},\Sigma'}$（Calabi–Yau complex part）。たとえば、toric Kähler part に関しては次が成立する。

定理 1. 標準多面体のカバー関係 $\Delta^*_j \supset \Delta^*_{j+1}$ と任意の *projective* Δ^*_{j+1}*-maximal fan* Σ_{j+1} に対して、その星状細分となる *projective* Δ^*_j*-maximal fan* Σ_j が存在して、$f_j : X_{\Sigma_j} \to X_{\Sigma_{j+1}}$ はトーリック多様体 X_{Σ_j} のある端射線 $R \subset \overline{\mathrm{NE}}(X_{\Sigma_j})$ に関する因子収縮となる。

ミラー対称性との関係に触れておく。good pair (Δ_1, Δ_2) には、自然な双対 (Δ^*_2, Δ^*_1) があり、Calabi–Yau 多様体の間のミラー対称性 $Y_{\Delta_1,\Delta_2} \leftrightarrow Y_{\Delta^*_2,\Delta^*_1}$ を示唆している。good pair の双対が、Batyrev のミラー対称性 $Y_\Delta \leftrightarrow Y_{\Delta^*}$ の拡張であることは明らかであり、その高次元での拡張を与える Mavlyutov のミラー対称性も、good pair の双対を用いて自然に記述される。さらに、（Newton 多面体の頂点のみを定義式に用いることで）Berglund–Hübsh–Krawitz のミラー対称性の拡張になることも知られている [ACG16]。一方、projective Δ_1-maximal fan Π_1 をとって、ミラー対称性 $Y_{\Delta_1,\Sigma_2} \leftrightarrow Y_{\Delta^*_2.\Pi_1}$ を考えると、幾何転移のミラーは再び幾何転移で関係するという Morrison 予想とも両立する：

$$Y_{\Delta,\Sigma} \to Y_{\Delta,\Sigma'} \leftsquigarrow Y_{\Delta',\Sigma'} \quad \longleftrightarrow \quad Y_{\Delta^*,\Pi} \rightsquigarrow Y_{(\Delta')^*,\Pi} \leftarrow Y_{(\Delta')^*,\Pi'}.$$

しかし、good pair の双対に対して素朴な形で位相的ミラー対称性（Euler 数の反転や Hodge 数の交換）が成立することは期待できない。この事情についても報告する。

参考文献

[ACG16] Michela Artebani, Paola Comparin, and Robin Guilbot, *Families of Calabi-Yau hypersurfaces in* $\mathbb{Q}$*-Fano toric varieties*, J. Math. Pures Appl. (9) **106** (2016), no. 2, 319–341. MR 3515305

[Fre15] Karl Fredrickson, *Generalized compactifications of batyrev hypersurface families*, 2015.