

# 多面体の大域連結性について

三浦 真人 (大阪大学)\*

本講演では、以下の問題へのアプローチと、関連する具体例の研究について報告する。

**問題 1** (多面体の大域連結性の問題).  $\mathbb{R}^d$  において、指定したクラスの多面体を対象とし、自然な包含写像を射とするような圏 (半順序集合) は、連結であるか?

ここで「指定したクラスの多面体」とは、反射的多面体、擬反射的多面体、ほとんど擬反射的多面体、標準多面体、端末多面体などの具体的なクラスを想定している。また、問題 1 の背景には、Calabi–Yau 多様体に関する Reid’s fantasy と呼ばれる有名な未解決問題がある。おおざっぱに言えば、ほとんど擬反射的多面体の大域連結性が、Reid’s fantasy をトーリック多様体の Calabi–Yau 超曲面に制限したバージョンを考えることに相当する。上に挙げた各クラスの多面体の定義や、問題 1 の詳しい幾何学的背景については、[3] を参照してもらいたい。

問題 1 に対し、[1] では、トーリック多様体の極小モデルプログラムと Sarkisov プログラムを用いるアプローチを採用した。知りたいクラスの多面体の圏  $\mathcal{P}$  において、極小モデルプログラムと Sarkisov プログラムの類似が働くことを示せば、そのクラスの多面体の大域連結性が従う。すなわち、 $\mathcal{P}$  の任意の二つの対象  $\nabla, \nabla'$  に対してそれぞれ極小モデルプログラムを走らせ、到達した対象同士を Sarkisov プログラムで結べばよい。この議論の前段階として、以下に定める原始生成系の圏においてこれらのプログラムがうまく定式化できることを見る。以下では、自由アーベル群  $N \simeq \mathbb{Z}^d$  を固定し、 $N$  の原始的格子点の集合を  $N^{\text{prim}}$  とかく。

**定義 2** ([1, Definition 2.1–2.3]).  $N_{\mathbb{R}}$  の原始生成系 (primitive generating set) とは、原始的格子点の集合  $A \subset N^{\text{prim}}$  であって、 $N_{\mathbb{R}}$  を錐として生成するものをいう。

1. 原始生成系の包含関係  $A \supset A'$  に対して、 $|A| = |A'| + 1$  が成り立つとき、 $A'$  は  $A$  の縮小 (reduction) によって得られるという。これを  $A \succ A'$  と表す。
2. 原始生成系  $A$  のファイバー構造 (fiber structure) とは、空でない部分集合  $A_f \subset A$  であって、 $A_f$  が  $A_f$  自身の張る線形部分空間  $L = \mathbb{R}A_f \subset N_{\mathbb{R}}$  の原始生成系となり、かつ  $A_f = A \cap L$  を満たすものをいう。

ファイバー構造  $A_f \subset A$  に対して、自然な射影  $\pi : N \rightarrow N_b = N/(N \cap L)$  があり、 $(N_b)_{\mathbb{R}}$  の原始生成系

$$A_b = \left\{ w \in \mathbb{R}_+ \pi(v) \cap N_b^{\text{prim}} \mid v \in A \setminus A_f \right\} \subset N_b^{\text{prim}}$$

も定まる。原始生成系  $A$  の森ファイバー構造とは、ファイバー構造  $A_f \subset A$  であって、 $|A| = |A_f| + |A_b|$  かつ  $|A_f| = \dim L + 1$  (最小値) を満たすものをいう。森ファイバー構造を  $A_f \boxtimes A$  と表す。

次の 2 つの定理は、トーリック多様体の極小モデルプログラムと Sarkisov プログラムを粗視化することで、原始生成系の圏において記述し直したものが、再びちゃんと働くということを述べたものである。

本研究は JSPS 科研費 JP21K03156, JP21H04994 の助成を受けたものです。

\* e-mail: miurror.jp@gmail.com

**定理 3** ([1, Remark 2.5]). 任意の原始生成系  $A$  は、縮小をくり返すことで森ファイバー構造を持つ原始生成系  $A'$  に到達する。

**定理 4** ([1, Corollary 3.2]). 任意の原始生成系の森ファイバー構造  $A_f \boxtimes A$ ,  $A'_f \boxtimes A'$  は、以下の図式 (とその逆) を組み合わせてつくられる列によって連結する。

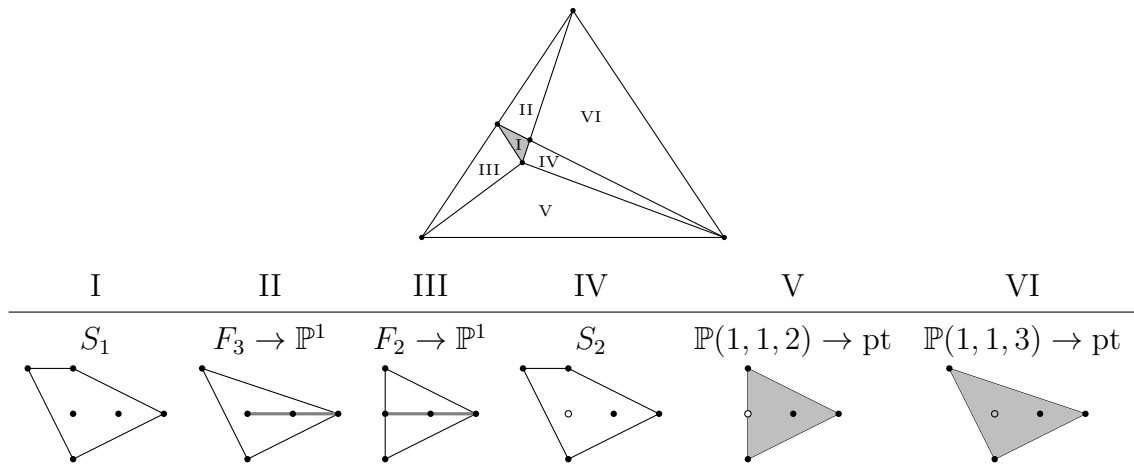
$$\begin{array}{cccccc}
 A > A' & A = A'' > A' & A < A'' > A' & A < A'' > A' & A = A'' = A' \\
 \boxtimes & \boxtimes & \boxtimes \cup \boxtimes & \boxtimes \cup \boxtimes & \boxtimes \cup \boxtimes & \boxtimes \cup \boxtimes \\
 A_f = A'_f & A_f \boxtimes A''_f > A'_f & A_f < A''_f > A'_f & A_f = A''_f = A'_f & A_f \boxtimes A''_f \boxtimes A'_f
 \end{array}$$

興味のある多面体の圏  $\mathcal{P}$  はたいいてい、多面体  $\nabla \subset N_{\mathbb{R}}$  に対し格子点集合  $\nabla \cap N^{\text{prim}}$  を対応させるという関手によって、原始生成系の圏の部分圏と見なせる。したがって、定理 3, 定理 4 が、 $\mathcal{P}$  に制限しても成立するかどうかの問題である。2次元の場合は、興味のある多角形の圏に制限してもなお、両方の定理が成立することが分かっており、とくに問題 1 は肯定的に解ける。

**定理 5** ([1, Theorem 1.3]). 反射的多角形の圏、端末多角形の圏は、連結である。

定理 5 の構成的な証明から、二つの多面体を連結させる具体的なアルゴリズムも得られる。その様子を試せるようにブラウザゲーム [2] をつくったので、ぜひ遊んで頂きたい。また、定理 5 の非構成的な証明は、非特異射影曲面の象 (elephant) であるような楕円曲線に対して、Reid's fantasy の類似が成り立つことも導く (cf. [1, Corollary 4.5])。次の例では、多角形の圏  $\mathcal{P}$  で Sarkisov プログラムが閉じていることを確認できる。

**例 6.**  $\mathbb{R}^2$  において、表の II, III で表される多角形をとれば Hirzebruch 曲面の間の双有理写像  $F_2 \dashrightarrow F_3$  が得られる。以下ではその共通解消  $S_1 \rightarrow F_1 \times F_2$  の (擬) 有効錐  $\text{Eff}(S_1)$  の切断面を図示した。  $\text{Eff}(S_1)$  に備わる二次扇の構造が豊富モデルによる細分を表す。  $\text{Eff}(S_1)$  の縁に沿う壁越えをすれば、対応する原始生成系の間を、定理 4 の図式で連結させていくことが出来る。森ファイバー構造 II, III をつなぐのに、IV, V, VI に表される原始生成系を用いる必要はなく、I, II, III に表される多角形のみを用いればよい。



[1] Makoto Miura, *The web of reflexive polygons is connected*, math.AG/2207.01632v1.  
 [2] —, *Solo-Cat* [Browser game], [github.com/miurror/solocat](https://github.com/miurror/solocat) (2023).  
 [3] 三浦 真人, *カラビ・ヤウ超曲面の幾何転移*, 城崎代数幾何学シンポジウム報告集 (2021); 「カラビ・ヤウ超曲面の幾何転移」正誤表, [miurror.github.io/#kinosaki2021](https://miurror.github.io/#kinosaki2021) (2023).  
 [4] —, *Calabi-Yau 超曲面の幾何転移*, 日本数学会秋季総合分科会, 北海道大学, 2022年9月15日, [miurror.github.io/#mathsoc2022](https://miurror.github.io/#mathsoc2022)